



ние

**Федеральное агентство по образованию
Российской Федерации
Государственное образовательное учрежде-**

**высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический
университет»**

**В.П. Стариков
Н.Г. Кац**

**Физико-математические методы в
нефтяной технологии**

**МОСКВА 2007
МАШИНОСТРОЕНИЕ-1**

В.П. СТАРИКОВ, Н.Г. КАЦ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В НЕФТЯНОЙ ТЕХНОЛОГИИ

Учебное пособие

Допущено Учебно-методическим объединением вузов Российской Федерации по нефтегазовому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 130603 «Оборудование нефтегазопереработки» направления подготовки дипломированных специалистов 130600 «Оборудование и агрегаты нефтегазового производства»

Машиностроение – 1
Москва 2007

УДК 665.52

ББК 35.514

Физико-математические методы в нефтяной технологии: Учебное пособие Стариков В.П., Кац Н.Г. М.: Машиностроение – 1, 2007. 152с.

ISBN 978-5-94275-329-0

Даны общие сведения об оптимизации применяемых решений при конструировании оборудования нефтегазопереработки, методы оптимального проектирования емкостного оборудования с учетом эксплуатационных факторов и некоторые закономерности в области технологии. Приведены примеры решения формализованных инженерных задач. Предназначены для студентов всех форм обучения, занимающихся расчетами и проектированием нефтяного оборудования.

Ил. 44. Табл. 4. Библиогр.: 19 назв.

Рецензенты: генеральный директор «Самаранефтехимпроект» д.т.н. Лесухин С.П.; заведующий кафедрой «Физика» д.ф-м.н. профессор Штеренберг А.М.

ISBN 978-5-94275-329-0 © В.П. Стариков, Н.Г. Кац, 2007

© Машиностроение-1, 2007

СТАРИКОВ ВИКТОР ПЕТРОВИЧ
КАЦ НИКОЛАЙ ГРИГОРЬЕВИЧ

**Физико-математические методы в нефтяной
технологии**

Редактор Т.И. Заболотская
Технический редактор Т.И. Заболотская

Подписано в печать 13.04.06
Формат 60 x 84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная
Усл. п.л. 6,46. Усл. кр.-отт. 6,46.
Тираж 1000. С. 152

Машиностроение-1
107076, г. Москва, Стромьинский пер., 4/1
Отпечатано в типографии
Самарского государственного технического университета
443100, г. Самара, Молодогвардейская, 244, корпус 8.



В.П. СТАРИКОВ Н.Г. КАЦ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В НЕФТЯНОЙ ТЕХНОЛОГИИ

Введение

Курс “Физико-математические методы в нефтяной технологии” является первой естественнонаучной дисциплиной специализации, поэтому целью данного курса является изложение теоретических основ и рассмотрение практических методов решения наиболее простых, но достаточно информативных инженерных задач. Для успешного изучения представленного материала необходимы знания основных разделов ранее освоенных дисциплин общетеоретического цикла: высшей математики, физики, теоретической механики и пр.

Курс построен в виде теоретического рассмотрения общеинженерных проблем и решения, конкретно сформулированных инженерных задач из области химической техники, расчета и проектирования нефтяного оборудования, выбора оптимального варианта решения какой-либо проблемы и т.д.

На практических занятиях большое внимание уделяется приобретению студентами навыков в самостоятельном решении инженерных задач, для этого они должны индивидуально изучать научно-техническую литературу, повторять разделы ранее пройденных дисциплин, уметь использовать ПЭВМ. Таким образом, при определенной математической подготовке студента становится возможным проследить всю цепочку инженерных действий, начиная от момента постановки задачи до получения готового решения.

Глава 1

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

1.1. Конструктивные особенности химической техники. Влияние параметров процесса на форму и размеры технологического оборудования

Анализ требований, предъявляемых к оборудованию химических производств, позволяет установить основные факторы, определяющие выбор как самой конструкции, так и ее размеров, а также конструкционный материал. Этими факторами являются:

- технологический процесс, проводимый в агрегате;
- нагрузки, действующие на узлы и детали при осуществлении технологического процесса;
- способ изготовления элементов машин и аппаратов;
- эксплуатационные требования к оборудованию.

В зависимости от выбранного технологического процесса определяются температура и давление внутри аппарата, а также состав и характер среды. Эти факторы в свою очередь влияют на исполнительные размеры, соответствующих аппаратов и машин, конструкция которых определяется наиболее целесообразным способом и конструктивными условиями осуществления необходимого технологического процесса, а также на выбор используемого конструкционного материала и способы защиты от коррозии.

При осуществлении технологического процесса на элементы конструкции действуют нагрузки, которые могут быть постоянными или незначительно меняющимися во времени и переменными или циклическими. Характер нагрузки влияет на методы изоляции от вибрации и т.д.

В зависимости от способа изготовления выбирается конструкционный материал и геометрическая форма аппарата.

Эксплуатационные требования также накладывают отпечаток на конструкцию. Например, необходимость проведения ремонтов внутренних элементов обуславливает устройство люков-лазов и разъемных соединений корпуса.

Для ускорения и облегчения процесса проектирования оборудования и сокращения сроков проведения ремонта проводятся унификация и стандартизация отдельных элементов и аппаратов в целом.

Стандартизированными являются многие детали и узлы, такие, как люки, штуцера, фланцы, трубы, крепежные детали и др. Стандартами устанавливается ряд предпочтительных размеров валов, диаметров цилиндрических аппаратов, объемов для емкостных аппаратов, ряд условных давлений для аппаратов и фланцевых соединений, ряд грузоподъемностей и т.д.

1.2. Критерии оптимизации и оптимальное проектирование машин и аппаратов

При проектировании перед конструктором всегда стоит задача выбора одного варианта из нескольких возможных, т.е. выбор такого, который представляет наибольший интерес. Выбор должен осуществляться по определенным критериям, называемым критериями оптимизации. Оптимизация может проводиться на различных уровнях, т.е. оптимизации может подвергаться какой-либо параметр – число оборотов барабанной мельницы, соотношение размеров емкостной аппаратуры и др. Может также осуществляться оптимизация на более высоком уровне (оптимальный выбор аппарата), например выбор типа теплообменника, количества и производительности центрифуг. Наиболее высоким уровнем оптимизации является оптимизация установки в целом, производства или завода.

Известно, что по величинам, содержащимся в задании на проектирование, нельзя однозначно определить все необходимые размеры и характеристики аппарата. Для того чтобы

свести задачу проектирования аппарата к формальному расчету, необходимо к тем величинам, которые названы в проектном задании, добавить ряд других, значения которых, в известной мере, могут быть выбраны конструктором произвольно. Иногда даже опытному конструктору необходимо сделать 5 - 6 вариантов расчета, прежде чем удастся отыскать приемлемые соотношения тех величин, которыми он задается: размер труб, тип днища, диаметр аппарата, число оборотов барабана и т.д. Опыт показывает, что различные комбинации этих величин приводят к существенно неравноценным результатам расчета. В одних случаях получаются эффективные аппараты, в других же малоэффективные или даже практически непригодные конструкции. Приемлемый вариант почти никогда не удается получить с первой попытки, поэтому конструктор обычно делает прикидку ряда вариантов, отличающихся друг от друга числовыми значениями принимаемых величин. Этот ряд последовательных приближений к проектному варианту в значительной степени подвержен влиянию опыта, интуиции конструктора и других субъективных факторов. Кроме того, само решение задачи, на каком варианте следует остановиться, также во многом носит субъективный характер. Часто оно выражается в терминах "получить хорошие значения скоростей", "получить приемлемые пропорции", "решение конструктивно" и т.п.

Положение можно изменить, если задачу проектирования оборудования формулировать как задачу оптимизации. При этом все достоинства аппарата выражаются посредством единственной величины – критерия оптимальности, по которой отдается предпочтение одним вариантам перед другими. Например, если в качестве критерия оптимальности принята масса аппарата, то это означает, что из двух других вариантов будет отдано предпочтение тому, у которого масса меньше. При проведении оптимизации расчет будет направлен на поиск такого варианта (из числа допустимых), для которого критерий оптимальности имеет экстремальное значение (наибольшее или наименьшее в зависимости от содержания критерия).

Естественно, направленность такого расчета, а также и его результат зависят от того, насколько принятый критерий соответствует цели проектирования и насколько полно он характеризует достоинства аппарата. При этом необходимо учитывать, что даже весьма совершенные критерии оптимальности все-таки полностью или частично игнорируют многие важные показатели качества аппарата, особенно те из них, которые в настоящее время плохо поддаются или вообще не поддаются формализации (например, такие, как уровень унификации, эргономические, патентно-правовые, эстетические и другие показатели). В таком смысле оптимизация представляет собой более или менее грубую модель творческого процесса поиска инженерного решения. В этом заключаются ее слабые стороны.

Преимущество оптимизации состоит в том, что это строго осознанный метод выбора наилучшего решения проблемы свободный от интуитивных представлений и, следовательно, исключающий промахи. Поэтому, цель любого расчета должна быть четко сформулирована и, иметь количественную оценку. С формальной точки зрения, любой критерий оптимальности аппарата можно считать функцией, зависящей от переменных двух видов:

1) величины, определенные в проектном задании на расчет аппарата $z_1, z_2, \dots, z_m$ (поскольку в пределах одной задачи эти величины постоянны, их можно отнести к параметрам);

2) величины, варьируемые конструктором в процессе поиска наилучшего варианта $x_1, x_2, \dots, x_n$ (эти величины в задаче оптимизации играют роль независимых переменных).

Таким образом, критерий оптимальности есть некоторая функция от m параметров и n независимых переменных:

$$KO=f(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m).$$

Для конструктора, приступающего к проектированию аппарата, вид этой функции должен быть полностью и однозначно определен. Она почти никогда не бывает настолько оче-

видной, чтобы ее можно было записать в виде достаточно простой и компактной алгебраической формулы. Однако всегда должен быть известен путь, как по заданным численным значениям всех переменных x_i и z_i можно получить численное значение критерия оптимальности КО. Иначе говоря, для решения данной задачи должен быть известен некоторый алгоритм расчета, позволяющий определять значение критерия оптимальности.

Следовательно, решение любой задачи оптимизации заключается в том, чтобы найти такие значения независимых переменных:

$$x_1 = x_1^*;$$

$$x_2 = x_2^*;$$

$$\dots$$

$$x_n = x_n^*,$$

чтобы $f(x_1^*, \dots, x_n^*, z_1, \dots, z_n) = \min$ (для определенности будем считать, что значение критерия оптимальности сводится к минимуму).

При этом необходимо помнить, что величины $x_1^*, \dots, x_n^*$ на практике не могут принимать любых значений. Например, теплообменник длиной 30 и диаметром 0,5 м не может быть принят конструктором даже в том случае, если значение критерия оптимальности для него минимально. В этом смысле всегда говорят об условном оптимуме, т.е. нахождении значений независимых переменных, доставляющих минимум критерия оптимальности при одновременном удовлетворении ряда ограничений. Эти ограничения фактически сужают область допустимых значений независимых переменных.

Ограничения могут налагаться как на значения отдельных независимых переменных, так и функций от них. Например, можно потребовать, чтобы диаметр аппарата был в заданных пределах или гидравлическое сопротивление аппарата не превышало максимально допустимого. В данном случае диа-

метр аппарата является независимой переменной, а гидравлическое сопротивление – сложной функцией ряда величин, часть из которых входит в состав независимых переменных. Такого рода ограничений может быть введено сколь угодно много. В общем случае ограничение можно записать в следующем виде

$$P_i(x_1, \dots, x_n) \in A_i$$

(значения функции P_i принадлежат области A_i), где P_i – функция независимых переменных; A_i – область допустимых значений для функции.

Таким образом, оптимизация аппарата может быть представлена как задача на условный оптимум и сформулирована следующим образом: найти значения $x_1^*, \dots, x_n^*$, такие, чтобы $f(x_1^*, \dots, x_n^*, z_1, \dots, z_n) = \min$ при соблюдении k условий вида

$$P_i(x_1, \dots, x_n) \in A_i \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Из сказанного следует, что при всем многообразии разновидностей задачи оптимизации решение ее должно содержать в себе два основных элемента:

- 1) реализацию расчета одного (произвольного по численным значениям независимых переменных) варианта аппарата, включая расчет величины критерия оптимальности;
- 2) изменение вариантов (значений независимых переменных) и их сравнение по величине критерия оптимальности.

В зависимости от конечной цели создания аппарата в качестве критерия оптимальности могут быть приняты различные величины. Так, для транспортных установок часто стремятся иметь наиболее легкие аппараты (здесь критерием оптимальности может быть их масса). При необходимости же размещения аппаратов в ограниченном пространстве в качестве критерия может быть выбран их габаритный объем или какой-нибудь из их габаритных размеров. Представление об эффективности проектируемых машин и аппаратов не всегда остается

ся постоянным в ходе решения задачи. Оно может меняться по мере накопления информации и в зависимости от достигнутых результатов.

Основное требование к критерию оптимальности состоит в том, что это должна быть единственная величина, которая, по возможности, наиболее полно отвечает поставленной цели создания аппарата. Требование единственности критерия существенно, так как при решении одной задачи в общем случае невозможно свести к минимуму или максимуму более чем одну величину. Иными словами, нельзя поставить задачу создать, например, такой аппарат, который имел бы минимальный объем и минимальную стоимость одновременно, хотя в некоторых частных случаях и может быть получено такое совпадение. Таким образом, математические модели можно построить для каждого из параметров, но одновременно оптимизировать несколько функций невозможно.

Именно невозможность удовлетворить одновременно более чем одному критерию оптимальности и требует от этой величины наиболее полного соответствия цели создания аппарата.

Выбор вида критерия оптимальности является одним из самых ответственных моментов при оптимизации аппарата, так как от него зависят направленность расчета и результаты выбора окончательного варианта. Обычно оптимизируется одна функция, наиболее важная с точки зрения исследования, при ограничениях, налагаемых другими функциями.

1.3. Математические методы получения целевой функции и поиска оптимального варианта

Для того чтобы повысить эффективность выбираемых решений необходимо применить математические методы. Поиск оптимальных решений необходим не только при конструи-

ровании емкостной аппаратуры, он необходим для любых проектных и конструкторских работ.

Для практического осуществления поиска оптимального варианта необходимо величины, входящие в критерий оптимальности, выразить через исходные данные и значения независимых переменных, определяющих соотношения размеров аппаратов.

Не следует, однако, думать, что речь идет о получении явной аналитической зависимости между указанными величинами. Получить такую зависимость не всегда возможно и чаще всего нецелесообразно, так как она будет иметь громоздкий и трудно воспринимаемый вид. Однако в этом и нет никакой необходимости. В данном случае достаточно указать путь, следуя которому можно вычислить значение критерия оптимальности для анализируемого варианта.

Организация такого расчета для произвольного варианта является центральной частью для всякого оптимизирующего расчета.

Поиск оптимального варианта осуществляется следующим образом:

1. Принимаются первые значения независимых переменных.
2. По принятым значениям и на основе исходных данных производится расчет данного варианта с определением значения критерия оптимальности.
3. Производится изменение значений независимых переменных и повторение п. 2.

После проведения расчета некоторого числа вариантов и сравнения их по величине критерия оптимизации отыскивается вариант с экстремальным значением критерия, который и является оптимальным для данной задачи.

1.4. Универсальный технико-экономический критерий оптимальности

Для многих установок химических производств такие характеристики, как масса, объем, занимаемая площадь не имеют решающего значения и проектирование аппаратуры для этих систем должно быть подчинено решению основной задачи – обеспечению высокой экономической эффективности. Иными словами, из всех вариантов возможной конструкции машины или аппарата, отвечающих заданным условиям, оптимальным признается экономически наиболее эффективный. Говоря же об оценке эффективности функционирования системы, важно помнить, что речь идет о системе в целом.

Поскольку критерий оптимальности в задаче может быть только один, от него требуется, чтобы он учитывал как можно больше различных характеристик рассматриваемого варианта. Таким критерием при анализе предлагаемого варианта производства или какого-либо нового аппарата может являться универсальный технико-экономический критерий "приведенные затраты". По смыслу – это сумма эксплуатационных и капитальных затрат, отнесенная к одному году нормативного срока окупаемости и, следовательно, наиболее эффективным будет тот вариант, у которого приведенные затраты минимальны.

Тот факт, что в структуре приведенных затрат фигурируют такие фундаментальные экономические величины, как капитальные затраты, эксплуатационные затраты и нормативный срок окупаемости, позволяет применять этот критерий для оптимизации любых производственных установок и конструкций независимо от их особенностей и назначения.

Для нахождения величины приведенных затрат все входящие в них составляющие должны быть выражены через технические характеристики рассматриваемой системы – размеры, массу, потери энергии и т.п.

Таким образом, несмотря на экономическую природу величины приведенных затрат, внутреннее содержание этого критерия является техническим. Иными словами, приведенные затраты представляют собой синтетическую величину, характеризующую технические достоинства конструкции в экономической форме.

Внутреннее содержание составляющих технико-экономического критерия зависит от конкретной конструкции. При этом чем полнее учитываются различные категории затрат, тем более обоснованным получается результат оптимизации. Необходимо отметить, что поскольку оптимизация – это сравнительный расчет вариантов, то в критерий оптимальности следует включать лишь те затраты, которые непосредственно влияют на выбор оптимального варианта.

Глава 2.

ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РАЗМЕРОВ ЕМКОСТНОГО ОБОРУДОВАНИЯ

2.1. Оболочки вращения. Основные понятия

Оболочки в виде цилиндров, шаров, эллипсоидов вращения, конусов или их комбинации широко применяются в конструкциях аппаратов на предприятиях нефтяной, нефтеперерабатывающей, химической и других отраслях промышленности. Таковы резервуары для хранения нефти и нефтепродуктов, ректификационные колонны, реакторы, электродегидраторы, отстойники, теплообменники и другие аппараты.

Столь значительное применение оболочек уже издавна заставило ученых и техников обратить внимание на вопросы теории при создании реальных конструкций из оболочек, и еще в XVII в. были предложены первые формулы для их расчета.

Как и во всех областях науки, необходимо, прежде всего, выработать или ввести основные понятия, которые позволят инженерам объясняться на едином языке. Для этого рассмотрим имеющиеся основные сведения по геометрии поверхностей вращения.

Оболочкой вращения называется оболочка, срединная поверхность которой образована вращением какой-либо плоской кривой вокруг оси, лежащей в ее плоскости. Кривая расположена по одну сторону от оси. Так, сфера образована вращением полуокружности вокруг ее диаметра, тор – вращением окружности вокруг прямой, не пересекающей данную окружность, конус – вращением отрезка прямой вокруг пересекающей отрезок оси и т. д.

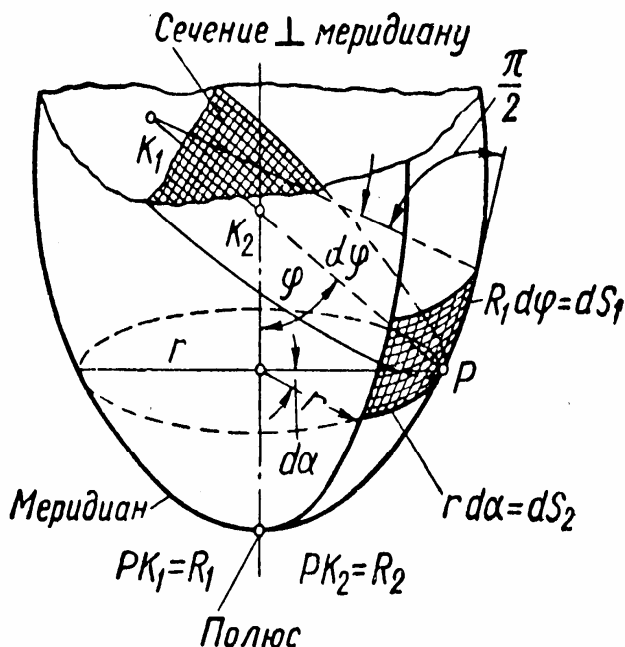
Срединной поверхностью называется поверхность оболочки, точки которой везде одинаково отстоят от внешней и внутренней поверхности.

Образующей поверхности вращения называется кривая, вращением которой образована срединная поверхность оболочки.

Полюсами оболочки называются точки пересечения поверхности с осью вращения.

Меридиан — это кривая, образованная на поверхности сечением ее плоскостью, проходящей через ось. Очевидно, что меридианы совпадают с образующими. Плоскости, перпендикулярные к оси, пересекают поверхность по кругам, называемым **параллельными кругами**.

Радиус кривизны меридиана в какой-либо точке поверхности называется **первым главным радиусом кривизны** поверхности в данной точке R_1 (рис. 2.1.).



Р и с. 2.1. Пример оболочки вращения

Радиус кривизны кривой, полученной от пересечения поверхности плоскостью, перпендикулярной к меридиану, называется **вторым главным радиусом кривизны** поверхности в этой же точке R_2 . Концы K_1 и K_2 радиусов кривизны называются **центрами кривизны**. Второй центр кривизны K_2 поверхности вращения лежит, как доказывается в аналитической геометрии, на оси оболочки и оба радиуса находятся на одной прямой, перпендикулярной к поверхности в рассматриваемой точке. Угол φ между нормалью к поверхности и осью называется **широтой** рассматриваемой точки.

Все линии, по которым плоскости, проходящие через нормаль к поверхности в данной точке, пересекают поверхность, называются **нормальными сечениями**. Очевидно, меридиан и кривая, по которой поверхность пересекается плоскостью, нормальной к меридиану, также являются нормальными сечениями и отличаются тем, что из всех нормальных сечений в данной точке они имеют **наибольший и наименьший** радиусы кривизны.

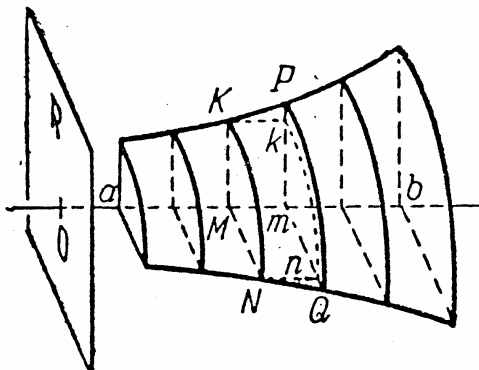
Если плоскость какого-либо нормального сечения образует угол θ с плоскостью меридиана, то радиус кривизны R этого сечения определяется следующим соотношением Эйлера:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \theta}{R_1} + \frac{\sin^2 \theta}{R_2}.$$

Если в какой-либо точке $R_1=R_2=R$, то радиусы кривизны всех нормальных сечений в этой точке также равны R . Такая точка называется *точкой округления*. Таковы, например, все точки сферической поверхности и полюсы эллипсоида вращения (сфероида), у которого все нормальные сечения в полюсе являются эллипсами, идентичными эллипсу, вращением которого вокруг его малой оси сфероид образован.

2.2. Определение объемов различных тел

Рассмотрим тело произвольной формы (рис. 2.2). Пусть известны площади $F(x)$ всех его сечений, параллельных плоскости $R(x - \text{расстояние сечения от плоскости } R)$.



Р и с. 2.2. Схема к определению объема тела произвольной формы

Тогда, из курса высшей математики, объем тела

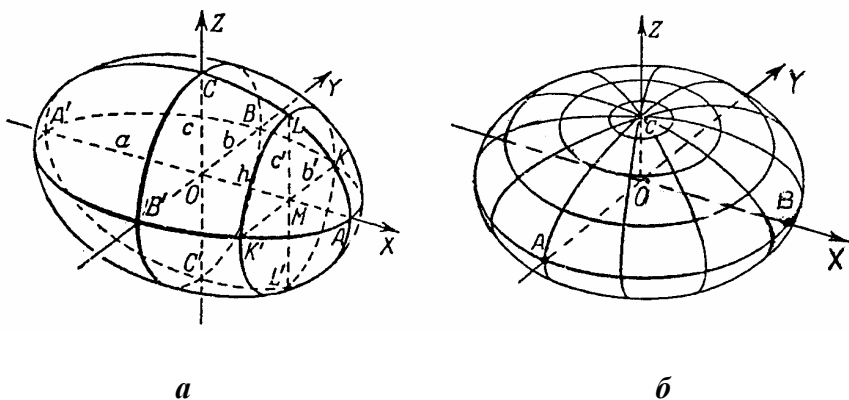
$$V = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx.$$

Для примера найдем объем эллипсоида (рис. 2.3 а) – поверхности, представляемой уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Сечения этой поверхности плоскостями XOY , XOZ , YOZ являются эллипсами с полуосями a , b и c .

Если все три величины a, b, c различны, то эллипсоид называется трехосным. Если какие-либо две из этих величин равны между собой, то такая поверхность называется эллипсоидом вращения. Другими словами, эллипсоид вращения (рис. 2.3 б) можно определить как поверхность, получаемую равномерным сжатием (или растяжением) сферы к ее экватору (от ее экватора).



Р и с. 2.3. Схема к расчету объема эллипсоида

Сечение $KLK'L'$ (см. рис. 2.3 а), параллельное главному эллипсу $BCB'C'$ и отстоящее от него на расстояние $h = OM$, есть эллипс с полуосями

$$b' = MK = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}}, c' = ML = c\sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}}$$

Площадь $F(h)$ сечения, равна площади эллипса

$$\frac{y^2}{(b')^2} + \frac{z^2}{(c')^2} = 1.$$

$$F(h) = 2 \int_{-b'}^{+b'} \frac{c'}{b'} \sqrt{y^2 - (b')^2} dy = \pi b' c' = \pi b c \left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right).$$

Объем эллипсоида

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^{+a} F(h) dh = 2 \int_0^a \pi b c \left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right) dh = 2 \pi b c \int_0^a dh - \frac{2 \pi b c}{a^2} dh = \\ &= 2 \pi a b c - \frac{2}{3} \pi a b c = \frac{4}{3} \pi a b c . \end{aligned}$$

Когда эллипсоид становится шаром ($a = b = c = R$), то получаем известную формулу

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 .$$

Для тел вращения (рис. 2.4.), т.е. тел, ограниченных поверхностью вращения и двумя плоскостями P_1, P_2 , перпендикулярными к оси вращения OX , объем может быть определен по формуле

$$V = \pi \int_a^{b'} Y^2 dx ,$$

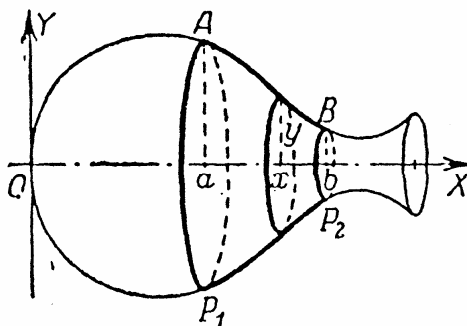
где $y = f(x)$ – ордината меридиана АВ.

В качестве примера найдем объем цилиндра, меридиан которого – прямая – представляется уравнением

$$y = R ;$$

$$V = \pi \int_0^H R^2 dx = \pi R^2 x \Big|_0^H = \pi R^2 H ,$$

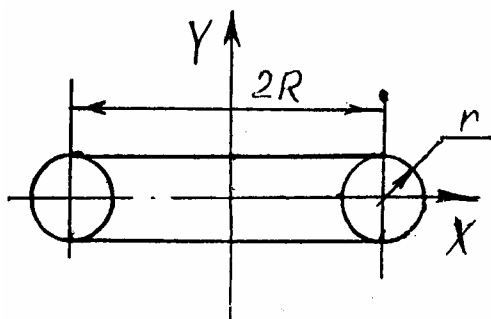
где H – высота цилиндра.



Р и с. 2.4. Схема к определению объема тел вращения

Для расчета объема тора (рис. 2.5.) также может быть использована данная формула:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-r}^r (R + \sqrt{r^2 - y^2})^2 dy - \pi \int_{-r}^r (R - \sqrt{r^2 - y^2})^2 dy = \\
 &= 4\pi R \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - y^2} dy = 4\pi R \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi^2 R r^2
 \end{aligned}$$



Р и с. 2.5. Схема к расчету объема тора

Объем части тора сечением DCF (рис. 2.10.) будет равен

$$V = 2\pi r^2 \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) \left[R - r \left(1 - \frac{0,33 \sin^3 \varphi}{\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}} \right) \right].$$

Для вычисления объема сложного вертикального цилиндрического тела, построенного на основании D и ограниченного сверху соответствующей частью поверхности $Z=f(x, y)$, может использоваться также двойной интеграл $V = \iint_D f(x, y) d\sigma$.

Если контур области D встречается со всякой пересекающей его вертикальной прямой не более чем в двух точках (M_1, M_2 на рис. 1.6 а), то область D задается неравенствами

$$a \leq x \leq b; \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),$$

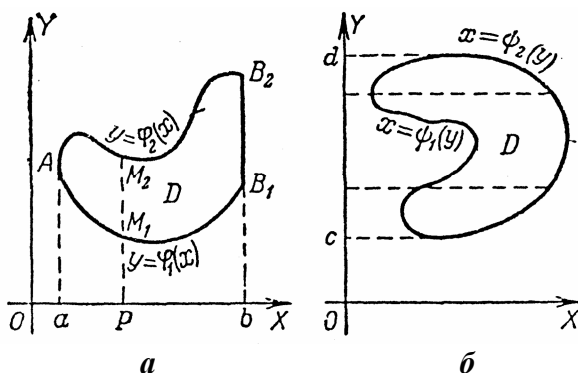
где a, b – крайние абсциссы области; $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – функции, выражающие ординаты нижней и верхней граничных линий AM_1B_1 и AM_2B_2 .

В этом случае двойной интеграл вычисляется следующим образом:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Если контур области встречается не более чем в двух точках со всякой пересекающей его горизонтальной прямой, имеем по аналогии (при обозначениях рис. 2.6 б)

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x, y) dx.$$



Р и с. 2.6. Схема к расчету объема сложного тела

В более сложных случаях область D разбивают на несколько частей так, чтобы к каждой части были применимы приведенные формулы.

Используя двойной интеграл, найдем объем "цилиндрического копыта", т.е. тела $ABCD$ (рис. 2.7.), отсеченного от полуцилиндра плоскостью ABC , проведенной через диаметр AC основания. Даны радиус основания $R = OA$ и высота копыта $h = DB$.

Выберем систему координат в соответствии с рисунком. Уравнение плоскости ABC будет $Z = \frac{h}{R}y$. Имеем

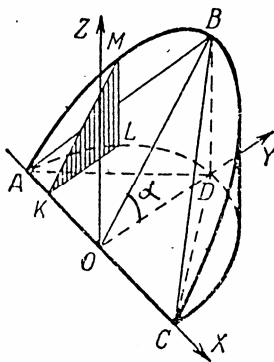
$$V = \iint_{(ABC)} \frac{h}{R} y dx dy.$$

По первому способу полагаем

$$a = -R; b = R; \varphi_1(x) = 0; \varphi_2(x) = KL = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Получаем

$$V = \int_{-R}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{h}{R} y dy.$$



Р и с. 2.7. Схема к расчету объема "цилиндрического копыта"

Выполнив интегрирование по y , находим

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{h}{R} y dy = \frac{h}{R} \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{h}{2R} (R^2 - x^2).$$

Это выражение дает площадь F сечения KLM ($F = \frac{1}{2} KL \cdot LM$, где $KL = \sqrt{R^2 - x^2}$, а LM находится из подобия треугольников KLM, ODB). Продолжая интегрирование, окончательно получаем следующее:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^R \frac{h}{2R} (R^2 - x^2) dx = \frac{h}{2R} R^2 x \Big|_{-R}^R - \frac{h}{2R} \frac{x^3}{3} \Big|_{-R}^R = \\ &= R^2 h - \frac{R^2 h}{3} = \frac{2}{3} R^2 h. \end{aligned}$$

К аналогичному результату можно прийти и вторым способом.

2.3. Определение поверхностей оболочек вращения

Площадь F поверхности, образованной вращением дуги АВ около оси ОХ, выражается интегралом

$$F = \int_{(A)}^{(B)} 2\pi y dF,$$

где y – ордината меридиана АВ;

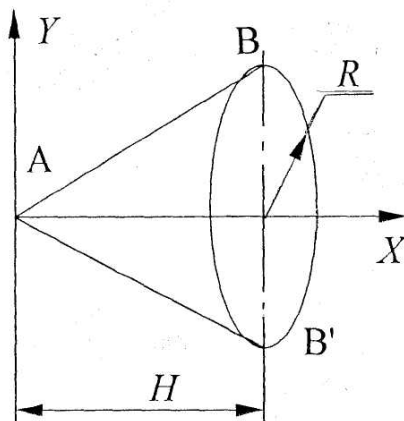
$dF = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ – дифференциал дуги;

(А) и (В) – крайние значения параметра, через который выражены координаты. В частности, за параметр удобно принять абсциссу X , тогда имеем

$$F = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Найдем площадь боковой поверхности прямого кругового конуса (рис. 2.8.) высотой H с радиусом основания R . Конус получается в результате вращения прямой $y = \frac{R}{H}x$ вокруг оси ОХ.

$$F = \int_0^H 2\pi \frac{R}{H} x \sqrt{1 + \left(\frac{R}{H}\right)^2} dx = 2\pi \frac{R}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{R}{H}\right)^2} \frac{H^2}{2} = \pi R \sqrt{R^2 + H^2}.$$



Р и с. 2.8. Схема к расчету поверхности конуса

Таким же образом рассчитывается площадь поверхности шара или сферы радиусом R . Уравнение образующей окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

$$F = \int_{-R}^R 2\pi \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = 2\pi R \int_{-R}^R dx = 4\pi R^2.$$

Формула для расчета поверхности эллипсоида вращения выводится аналогично (при отношении полуосей $m \geq 1$):

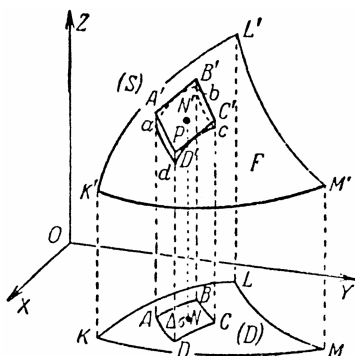
$$F = 2\pi R^2 \left(1 + \frac{\ln(m + \sqrt{m^2 - 1})}{m\sqrt{m^2 - 1}} \right).$$

Площадь части поверхности также можно найти достаточно просто. Пусть некоторый кусок $K'L'M'$ (рис. 2.9.) поверхности S проектируется на область D плоскости XOY (KLM на рисунке), причем в каждую точку N области D проектируется только одна точка N' рассматриваемого куска.

Тогда площадь F куска $K'L'M'$ выражается двойным интегралом

$$F = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} d\sigma ,$$

где $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ и $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.



Р и с. 2.9. Схема к расчету части поверхности

В качестве примера найдем площадь части тора с дугой CD (рис. 2.10.), являющегося переходом между цилиндрическим корпусом и коническим или сферическим днищем

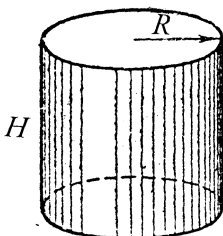
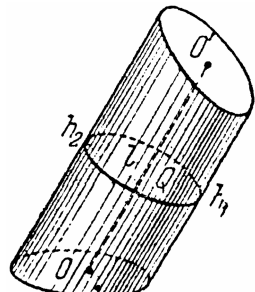
$$F = 2\pi r \left[R - r \left(1 - \frac{\sin \varphi}{\varphi} \right) \right] \varphi .$$

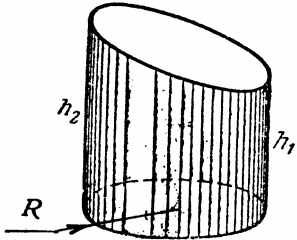
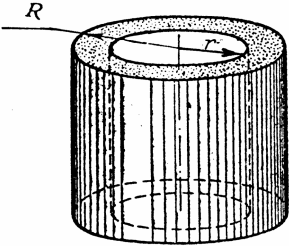
Аналогично можно найти площадь поверхности копыта (см. рис. 2.7)

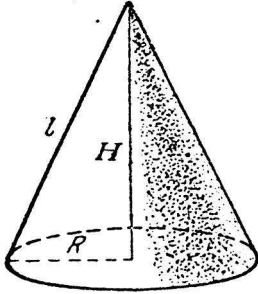
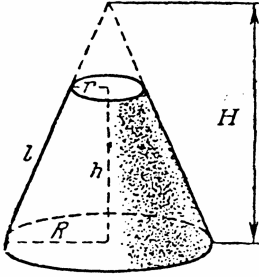
ГЕОМЕТРИЯ НЕКОТОРЫХ ТЕЛ

Таблица 2.1

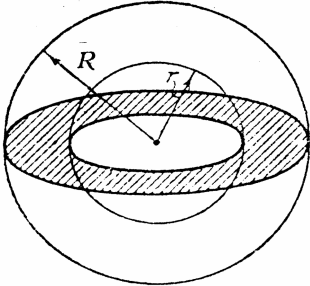
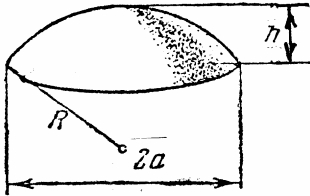
(V – объем тела; $F_{\text{б}}$ – боковая поверхность; F – полная поверхность)

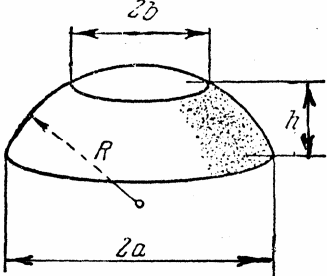
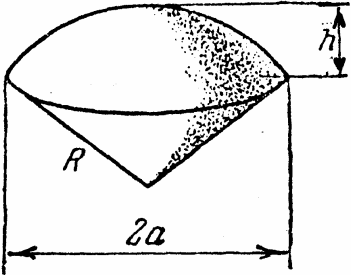
Тело	Обозначения	Формулы
Прямой круговой цилиндр 	R – радиус основания H – высота	$V = \pi R^2 H$; $F_{\text{б}} = 2\pi R H$; $F = 2\pi R (H + R)$
Цилиндр, усеченный непараллельно основанию 	h_1 и h_2 – наименьшая и наибольшая образующие; l – длина отрезка, соединяющего центры тяжести оснований O и O'; Q и P – площадь и периметр сечения, перпендикулярного отрезку OO'	$V = Q \cdot l$; $F_{\text{б}} = 0,5 P (h_1 + h_2)$

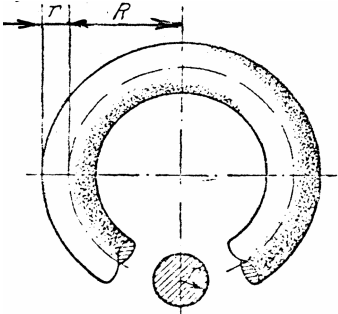
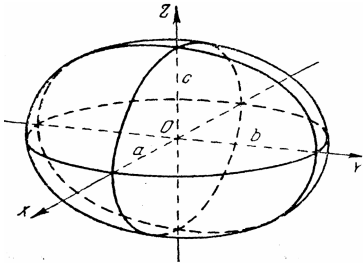
Тело	Обозначения	Формулы
Прямой круговой цилиндр, усеченный непараллельно основанию 	R – радиус основания; h_1 и h_2 – наименьшая и наибольшая образующие	$V = \frac{1}{2} \pi R^2 (h_1 + h_2);$ $F_o = \pi R (h_1 + h_2);$ $F = \pi R [h_1 + h_2 + R + \sqrt{R^2 + (\frac{h_2 - h_1}{2})^2}]$
Полый цилиндр (цилиндрическая труба) 	R – наружный радиус; r – внутренний радиус; H – высота; $\delta = R - r$ – толщина стенки	$V = \pi H (R^2 - r^2) = \pi H \delta (2R - \delta) = \pi H \delta (2r + \delta)$ $F_o = 2 \pi H (R + r)$ $F = 2 \pi (R + r) (H + R - r)$

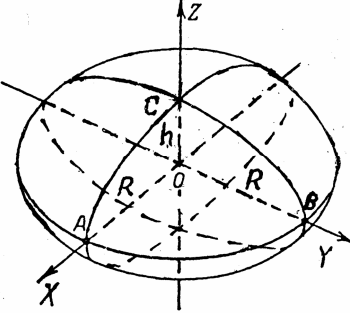
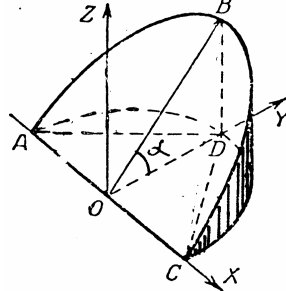
Тело	Обозначения	Формулы
Прямой круговой конус 	R – радиус основания; H – высота; $l = \sqrt{R^2 + H^2}$ – образующая	$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H;$ $F_{\phi} = \pi R \sqrt{R^2 + H^2} = \pi R l;$ $F = \pi R (R + l)$
Усеченный прямой круговой конус 	R и r – радиусы оснований; h – высота; l – образующая; $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2};$ H – высота неусеченного конуса: $H = h + \frac{hr}{R - r}$	$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr);$ $F_{\phi} = \pi l (R + r);$ $F = \pi [R^2 + r^2 + l(R + r)]$

Продолжение табл. 2.1

Тело	Обозначения	Формулы
Полый шар 	R – наружный радиус; r – внутренний радиус; D – наружный диаметр; d – внутренний диаметр	$V = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3) =$ $= \frac{1}{6}\pi(D^3 - d^3);$ $F = 4\pi(R^2 + r^2) =$ $= \pi(D^2 + d^2)$
Шаровой сегмент 	h – высота сегмента; R – радиус шара; a – радиус основания сегмента: $a = \sqrt{h(2R - h)}$	$V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2) =$ $= \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h);$ $F_o = 2\pi R h = \pi(a^2 + h^2);$ $F = \pi(2a^2 + h^2) =$ $= \pi(a^2 + 2Rh)$

Тело	Обозначения	Формулы
Шаровой слой 	h – высота слоя; a и b – радиусы оснований $(a > b)$; R – радиус шара	$V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2);$ $F_o = 2\pi R h;$ $F = \pi(a^2 + b^2 + 2Rh)$
Шаровой сектор 	h – высота сегмента; a – радиус основания сегмента; R – радиус шара	$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h;$ $F = \pi R(a + 2h)$

Тело	Обозначения	Формулы
Тор (цилиндрическое кольцо) 	r – радиус поперечного сечения; R – расстояние центра поперечного сечения от оси вращения	$V = 2\pi^2 R r^2;$ $F = 4\pi^2 R r$
Эллипсоид 	a, b, c – полуоси	$V = \frac{4}{3} \pi abc$

Тело	Обозначения	Формулы
Эллипсоид вращения 	$m = \frac{R}{h} \quad (R > h)$	$V = \frac{4}{3} \pi R^2 h = \frac{4}{3m} \pi R^3;$ $F = 2\pi R^2 \left[1 + \frac{\ln(m + \sqrt{m^2 - 1})}{m\sqrt{m^2 - 1}} \right]$
"Цилиндрическое копыто" 	R – радиус; α – угол наклона плоскости сечения	$V = \frac{2}{3} R^3 \operatorname{tg} \alpha;$ $F_0 = 2R^2 \operatorname{tg} \alpha$

Найдем первую производную от объема и приравняем ее к нулю

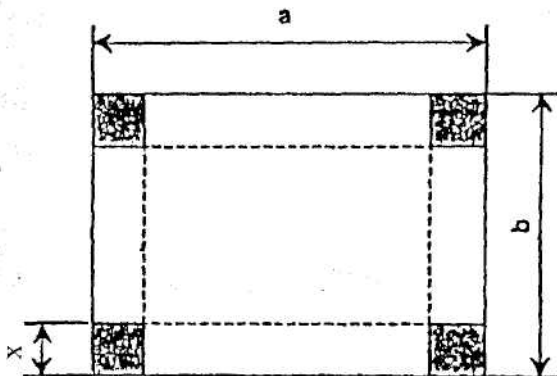
$$V' = (-2) \cdot (b - 2x) \cdot x + (-2) \cdot (a - 2x) \cdot x + (a - 2x) \cdot (b - 2x) = 0.$$

После упрощения получим уравнение

$$12x^2 - 4(a + b) \cdot x + a \cdot b = 0.$$

Подставим численные значения величин и решим данное квадратное уравнение, тогда $x_1 = 0,394$ м, $x_2 = 0,106$ м.

Первое решение не имеет физического смысла, так как невозможно при ширине листа 0,5 м вырезать два квадрата, у которых стороны составляют 0,394 м.



Р и с. 2.11. Схема к расчету объема коробки

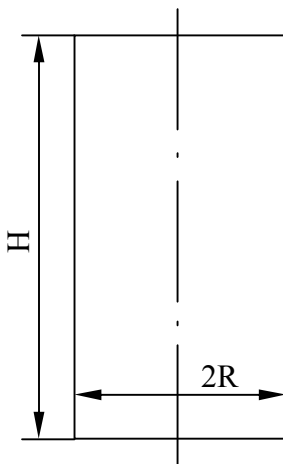
Найдем вторую производную от объема и определим ее знак при значении x_2

$$V'' = 24x - 4(a + b) = 24x - 6 = 2,544 - 6 < 0.$$

Функция имеет максимум, и второе решение является искомым.

2.5. Оптимизация размеров сосудов, работающих при атмосферном давлении

В данном случае за критерий оптимизации может быть принята полная поверхность сосуда. Проведем расчет оптимальных размеров цилиндрической емкости с двумя плоскими крышками объемом V (рис. 2.12).



Р и с. 2.12. Схема сосуда

Объем сосуда

$$V = \pi R^2 H \Rightarrow H = \frac{V}{\pi R^2}.$$

Полная поверхность сосуда составляет

$$F = 2\pi R H + 2\pi R^2 = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2.$$

По условию оптимальными будут размеры, при которых полученная поверхность сосуда имеет минимальную величину.

Найдем

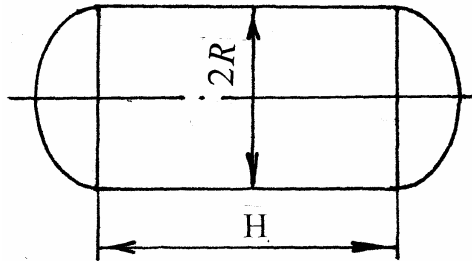
$$F' = -\frac{2V}{R^2} + 4\pi R.$$

Условие оптимальности выполняется при $F' = 0$, тогда

$$R_{opt} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Вторая производная $F'' = \frac{4V}{R^3} + 4\pi > 0$, следовательно, функция имеет минимум.

Аналогичные расчеты легко провести и для цилиндрической емкости с эллиптическими днищами, которые представляют собой полуэллипсоиды вращения (рис. 2.13).



Р и с. 2.13. Схема сосуда с эллиптическими днищами

Объем эллиптического днища составляет

$$V_d = \frac{2}{3}\pi R^2 H_d,$$

где H_d – высота днища.

Обозначим отношение полуосей эллипсоида через $m = \frac{R}{H_d} (m \geq 1)$, тогда

$$V_{\phi} = \frac{2\pi}{3m} R^3.$$

Объем сосуда с двумя днищами будет

$$V = \pi R^2 H + \frac{4\pi}{3m} R^3$$

или

$$H = \frac{V - \frac{4\pi}{3m} R^3}{\pi R^2}.$$

Если правая часть последнего уравнения равна нулю, то R принимает значение

$$R = R_0 = \sqrt[3]{\frac{3mV}{4\pi}}.$$

В этом случае длина цилиндра $H=0$ и объем сосуда равен объему днищ, поэтому должно быть $R \leq R_0$.

Полная поверхность сосуда состоит из боковой поверхности цилиндрической части и поверхности двух эллиптических днищ.

Поверхность эллиптического днища, как было показано ранее, составляет

$$F_{\phi} = \pi R^2 \left[1 + \frac{\ln(m + \sqrt{m^2 - 1})}{m\sqrt{m^2 - 1}} \right].$$

Обозначим выражение в скобках через A , тогда полная поверхность емкости

$$F = 2\pi RH + 2\pi R^2 A.$$

Аналогично предыдущему примеру

$$F = 2\pi R \frac{V - \frac{4\pi}{3m} R^3}{\pi R^2} + 2\pi R^2 A = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2 B,$$

где $B = A - \frac{4}{3m}.$

Образую производную от F по R и приравнивая ее к нулю, получим

$$F' = -\frac{2V}{R^2} + 4\pi RB = 0,$$

откуда

$$R_{opt} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi B}} = C\sqrt[3]{V},$$

где $C = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi B}}.$

Вторая производная

$$F'' = \frac{4V}{R^3} + 4\pi B > 0,$$

она положительна при любом значении R. Значит, при $R = R_{opt}$ поверхность будет минимальной.

При всяком значении $R \neq R_{opt}$ поверхность сосуда, а значит, и расход материалов будет больше минимальной.

Для корректного решения задачи следует принимать размеры, а именно диаметр емкости, в соответствии со стандартным рядом диаметров аппаратов.

Ниже даны значения A , B и C для наиболее применяемых значений m :

m	1,000;	1,500;	2,000;	2,500.
A	2,000;	1,540;	1,380;	1,270.
B	0,667;	0,695;	0,713;	0,741.
C	0,620;	0,615;	0,607;	0,599.

2.6. Геометрия сосудов с торосферическими днищами

Днища сосудов этого типа (рис. 2.10.) имеют меридиан с двумя радиусами кривизны, состоящий из дуги окружности ABC с радиусом q и двух дуг окружности $CD = AE$ с радиусом r , имеющих в точках сопряжения A и C общие касательные с дугой ABC . Таким образом, объем днища состоит из объема шарового сегмента ABC , объема части кругового тора с сечением DCF и объема цилиндра $ACFG$.

Обозначим $r = kR (k \leq 1); q = lR (l \geq 1)$.

Из рис. 2.10. получим

$$\cos \varphi = \frac{1 - k}{l - k},$$

$$\frac{h}{R} = l - \sqrt{(l - k)^2 - (1 - k)^2}.$$

Для определения центра O шарового сегмента определим значение p :

$$p = (q - r) \sin \varphi = R \sqrt{(l - k)^2 - (1 - k)^2}.$$

Обозначим:

V_1 и F_1 – объем и площадь шарового сегмента ABC ;

V_2 – объем цилиндра сечением $ACFG$;

V_3 и F_3 – объем и площадь части тора сечением DCF .

Из предыдущих разделов

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi q^3 (1 - \sin \varphi)^2 (2 + \sin \varphi);$$

$$V_2 = \pi r [R - r(1 - \cos \varphi)]^2 \sin \varphi;$$

$$V_3 = 2\pi R^2 \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) \left[R - r \left(1 - \frac{0,33 \sin^3 \varphi}{\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}} \right) \right]$$

и объем сосуда будет составлять

$$V = 2(V_1 + V_2 + V_3) + \pi R^2 H = 2V_{\text{дн}} + \pi R^2 H,$$

где $V_{\text{дн}} = V_1 + V_2 + V_3$ – объем днища;
 H – высота цилиндрической части.

$$H = \frac{V - 2V_{\text{дн}}}{\pi R^2}.$$

Поверхности отдельных элементов емкости можно подсчитать по следующим формулам:

$$F_1 = 2\pi q^2 (1 - \sin \varphi);$$

$$F_3 = 2\pi r \left[R - r \left(1 - \frac{\sin \varphi}{\varphi} \right) \right] \varphi.$$

Полная поверхность емкости составляет

$$F = 2(F_1 + F_3) + 2\pi R H.$$

Аналогично предыдущим примерам могут быть найдены оптимальные размеры емкости.

2.7. Геометрия сосудов с коническим днищем с плавным переходом

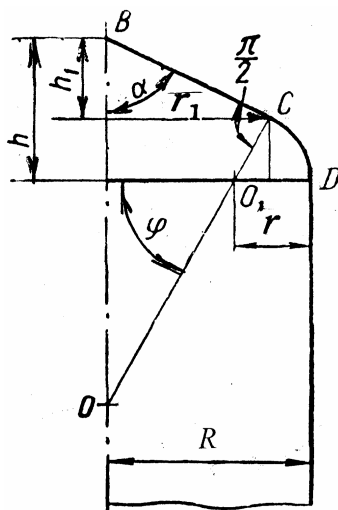
Обозначим через α половину угла при вершине конуса (рис. 2.14.). Имеем $\varphi = \alpha$. Радиус основания конуса и его высота равны

$$r_1 = R - r + r \cos \alpha = R - r(1 - \cos \alpha),$$

$$h_1 = r_1 \operatorname{ctg} \alpha,$$

а полная высота днища составляет

$$h = h_1 + r \sin \alpha .$$



Р и с. 2.14. Схема конического днища с торовым переходом

Объем такого днища равен

$$V_o = \frac{1}{3} \pi r_1^2 h_1 + V_2 + V_3,$$

где V_2 и V_3 имеют те же значения, что и в случае торосферического днища.

Поверхность днища равна

$$F_o = \frac{\pi r_1^2}{\sin \alpha} + F_3,$$

где F_3 имеет то же значение, как и в случае торосферического днища, только следует подставить $\varphi = \alpha$. Дальнейшие расчеты аналогичны предыдущему примеру.

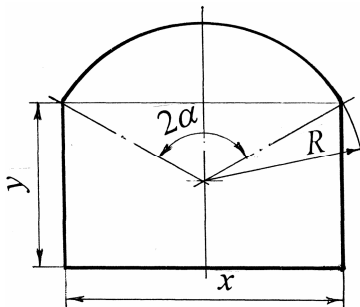
2.8. Задачи оптимизации плоских сечений

В некоторых случаях задача оптимизации может быть еще более упрощена. Например, при проектировании подземного газохода от трубчатой печи до дымовой трубы расстояние определяется из условий безопасности и возможности реализации монтажных и ремонтных работ. В этом случае затраты материала на изготовление газохода пропорциональны периметру поперечного сечения.

Рассмотрим возможность оптимального проектирования для газохода с поперечным сечением на рис. 2.15.

Площадь поперечного сечения S определяется количеством дымовых газов и допустимой скоростью их движения. Она обычно задана или может быть рассчитана из условия задачи. В данной задаче она равна сумме площадей прямоугольника и сегмента круга.

$$S = S_{np} + S_{сез} = xy + \frac{x^2(2\alpha - \sin 2\alpha)}{4(1 - \cos 2\alpha)}.$$



Р и с. 2.15. Сечение газохода

Отсюда

$$y = \frac{S - \frac{x^2(2\alpha - \sin 2\alpha)}{4(1 - \cos 2\alpha)}}{x}.$$

Периметр рассматриваемого сечения равен

$$P = x + 2y + L,$$

где L – длина дуги окружности радиусом $R = x/2\sin\alpha$.

Подставляя найденные значения соответствующих величин, получим

$$P = x + 2 \frac{S - \frac{x^2(2\alpha - \sin 2\alpha)}{4(1 - \cos 2\alpha)}}{x} + \frac{\alpha x}{\sin \alpha} =$$

$$= x + \frac{2S}{x} - \frac{x}{4} \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} + x \frac{\alpha}{\sin \alpha}.$$

Как и в предыдущих примерах, находим первую производную и приравниваем ее к нулю.

$$P' = 1 - \frac{2S}{x^2} - \frac{1}{4} \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} + \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 0.$$

Введем обозначение

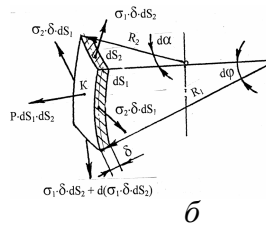
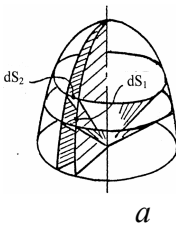
$$\beta = 1 - \frac{1}{4} \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} + \frac{\alpha}{\sin \alpha}.$$

Окончательно имеем

$$x_{opt} = \sqrt{\frac{2S}{\beta}}.$$

2.9. Уравнение Лапласа

С помощью двух меридиональных и двух конических нормальных сечений (сечений перпендикулярных к меридиану) выделим из оболочки (рис. 2.16 а) элемент размерами dS_1 и dS_2 и рассмотрим его равновесие под действием внутреннего давления P .



Р и с. 2.16. Схема к выводу уравнения Лапласа

Введем следующие обозначения: σ_1 – меридиональные напряжения; σ_2 – кольцевые или тангенциальные напряжения; δ – толщина оболочки.

В общем случае на каждую грань элемента действуют продольные силы (растяжения и сжатия), поперечные силы и изгибающие моменты. Для тонкостенных оболочек мембранная теория пренебрегает поперечными силами и изгибающими моментами. Кроме того, вдали от края оболочки можно пренебречь слагаемым $d(\sigma_1 \cdot \delta \cdot dS_2)$.

Произведения величин напряжений на площади соответствующих граней дают силы $\sigma_1 \cdot \delta \cdot dS_2$ и $\sigma_2 \cdot \delta \cdot dS_1$, показанные на рис. 2.16 б.

К выделенному элементу также приложена сила нормального давления $P \cdot dS_1 \cdot dS_2$. Проектируя все силы на нормаль к поверхности оболочки в точке K получим:

$$P \cdot dS_1 \cdot dS_2 - \sigma_1 \cdot \delta \cdot dS_2 \cdot d\varphi - \sigma_2 \cdot \delta \cdot dS_1 \cdot d\alpha = 0$$

С учетом того, что $d\varphi = dS_1 / R_1$ и $d\alpha = dS_2 / R_2$, следует

$$P \cdot dS_1 \cdot dS_2 - \sigma_1 \cdot \delta \cdot dS_2 \frac{dS_1}{R_1} - \sigma_2 \cdot \delta \cdot dS_1 \frac{dS_2}{R_2} = 0.$$

После упрощения уравнение принимает вид

$$\frac{\sigma_1}{R_1} + \frac{\sigma_2}{R_2} = \frac{P}{\delta}.$$

Эта формула известна как уравнение Лапласа. Она связывает между собой меридиональные и кольцевые напряжения.

Из уравнения Лапласа выводятся уравнения, которые позволяют рассчитать толщину оболочки вращения произвольной формы. Необходимо помнить, что уравнение Лапласа справедливо для тонкостенных оболочек, толщина стенок ко-

торых не превышает 10% их радиуса кривизны, поэтому оно используется для расчета тонкостенных оболочек, работающих под внутренним давлением.

2.10. Расчет толщины стенок оболочек вращения

Для цилиндрической оболочки $R_1 = \infty$, следовательно, $\sigma_1/R_1 = 0$. Из уравнения Лапласа следует

$$\sigma_2/R_2 = P/\delta, \text{ или } \sigma_2 = P \cdot R_2/\delta.$$

Из уравнения равновесия цилиндра нагруженного внутренним давлением и закрытого крышкой, в курсе "Конструирование и расчет элементов оборудования отрасли" выводится, что

$$\sigma_1 = P \cdot R_2/2 \cdot \delta, \text{ т.е. } \sigma_2 = 2 \cdot \sigma_1.$$

Более удобно пользоваться внутренним D_B или наружным D_H диаметрами цилиндра

$$D_B = 2R_2 - \delta, \text{ или } D_H = 2R_2 + \delta.$$

По методу предельных напряжений должно соблюдаться условие $\sigma_{\max} = \sigma_2 \leq [\sigma]$.

Допускаемое напряжение $[\sigma]$ для различных материалов может быть принято по [6].

Принимая во внимание наличие сварных швов и длительность эксплуатации оболочки можно записать

$$S_{\text{ц}} = \frac{PD_B}{2\phi[\sigma] - p} + C,$$

или

$$S_{ц} = \frac{PD_H}{2\varphi[\sigma] + p} + C,$$

где $S_{ц}$ – исполнительная толщина цилиндрической оболочки;

φ – коэффициент прочности сварного шва;

C – прибавка на компенсацию коррозии.

При равномерной поверхности коррозии можно принять

$$C = \Pi \cdot T,$$

где Π – глубинный показатель коррозии;

T – срок службы аппарата.

Для полусферического днища из условия симметричности оболочки следует $R_1 = R_2 = R$ и $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Тогда уравнение Лапласа запишется как

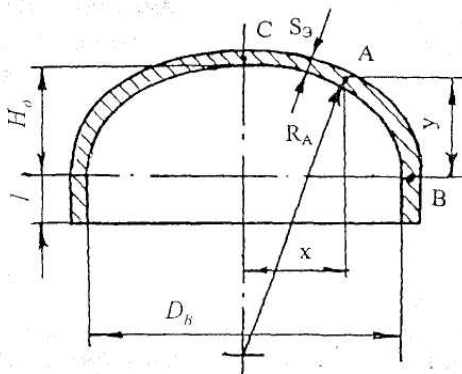
$$\frac{\sigma}{R} + \frac{\sigma}{R} = \frac{P}{\delta}, \text{ или } \sigma = \frac{PR}{2\delta}.$$

Используя подстановки предыдущего случая получаем толщину полусферического днища

$$S_{п} = \frac{PD_B}{4\varphi[\sigma] - P} + C, \text{ или } S_{п} = \frac{PD_H}{4\varphi[\sigma] + P} + C.$$

При расчете эллиптических днищ необходимо помнить, что радиус кривизны образующей непрерывно меняется. В произвольной точке A (x, y) (рис. 2.17.) радиус кривизны рассчитывается по уравнению

$$R = \left(\frac{D_B}{2}\right)^2 H^2_o \left(\frac{16x^2}{D_B^4} + \frac{y^2}{H_o^4}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

$$R_{\max} = \frac{D_B^2}{4H_\partial}.$$


Для стандартных эллиптических днищ справедливо соотношение $D_R=4H_\phi$.

Толщина эллиптического днища может быть рассчитана по следующему уравнению:

$$S_{\mathfrak{O}} = \frac{PD_B y_{\mathfrak{O}}}{2\varphi[\sigma] - py_{\mathfrak{O}}} + C,$$

ИЛИ

$$S_{\mathfrak{S}} = \frac{PD_H y_{\mathfrak{S}}}{2\varphi[\sigma] + py_{\mathfrak{S}}} + C,$$

где $y_9 = \frac{1}{6} \left[2 + \left(\frac{D_B}{2H_0} \right)^2 \right]$ – коэффициент формы днища.

Для стандартного эллиптического днища $y_3 = 1$.

В курсе "Конструирование и расчет элементов оборудования отрасли" дополнительно выводятся уравнения, которые позволяют рассчитывать толщины конических и торосферических днищ, а также плоских крышек.

2.11. Расчет оптимальных размеров емкости, работающей под действием внутреннего давления

Для сосудов, работающих под давлением, толщина стенки, а значит и расход материала, определяется соотношением геометрических размеров и величиной давления.

В качестве примера рассмотрим возможность оптимизации размеров цилиндрической емкости с двумя стандартными эллиптическими днищами (рис. 2.13.), работающей под действием внутреннего давления P . В данном случае за критерий оптимизации может быть принята масса аппарата, которая зависит от поверхности оболочки и ее толщины

$$M = \sum F_i S_i \rho_i,$$

где F_i – поверхность i -того элемента;
 S_i – толщина i -того элемента;
 ρ_i – плотность материала i -того элемента.
 Для рассматриваемого примера

$$M = F_{\text{ц}} S_{\text{ц}} \rho_{\text{ц}} + 2F_{\text{э}} S_{\text{э}} \rho_{\text{э}},$$

где $F_{\text{ц}} = 2\pi RH$ – поверхность цилиндрической оболочки;
 $S_{\text{ц}} = \frac{2PR}{2\varphi[\sigma] - P} + C$ – толщина цилиндрической оболочки;
 $F_{\text{э}} = 1,38\pi R^2$ – поверхность эллиптического днища (полуэллипсоида вращения);

$$S_3 = \frac{2PR}{2\varphi[\sigma] - P} + C - \text{толщина стандартного эллиптического днища};$$

ского днища;

$\rho_{ц}$ – плотность материала цилиндрической части;

ρ_3 – плотность материала днищ.

Две переменные величины R и H связаны между собой через заданный объем емкости.

$$V = V_{ц} + 2V_3 = \pi R^2 H + 2(2/3\pi R^2 H_d) = \pi R^2 H + 2/3\pi R^3.$$

Отсюда

$$H = \frac{V}{\pi R^2} - \frac{2}{3}R.$$

Подставив значения всех величин в основное уравнение, получим

$$M = 2\pi R \left(\frac{V}{\pi R^2} - \frac{2}{3}R \right) \left(\frac{2PR}{2\varphi[\sigma] - P} + C \right) \rho_{ц} + \\ + 2 \cdot 1,380\pi R^2 \left(\frac{2PR}{2\varphi[\sigma] - P} + C \right) \rho_3.$$

Упростив уравнение, найдя производную и приравняв ее к нулю, получим

$$R^4 + AR^3 - B = 0,$$

где A и B – коэффициенты.

Данное уравнение может быть решено численными методами или графически.

Решим данную задачу при условии, что емкость имеет объем $V=10 \text{ м}^3$, изготовлена с использованием автоматической двухсторонней сварки под слоем флюса ($\varphi=1$) из стали 20, эксплуатируется на открытой площадке под внутренним давлением $P=1,5 \text{ МПа}$ и предназначена для обработки и хранения сер-

нистого печного топлива при температуре окружающей среды. Скорость процесса атмосферной коррозии данной стали составляет 0,05 мм/год, а скорость коррозии в печном топливе - 0,3 мм/год. Расчетный срок службы емкости 20 лет. По табл. 5 [6] для сталей 20 и 20К при температуре 20°C [σ] = 147 МПа.

Определим прибавку на коррозию

$$C = 0,05 \cdot 20 + 0,3 \cdot 20 = 7 \text{ мм} = 0,007 \text{ м.}$$

Плотность металла корпуса и днищ одинаковая, т.е. $\rho = \rho_{\text{ц}} = \rho_{\text{д}} = 7800 \text{ кг/м}^3$.

Масса корпуса емкости

$$M = \left(\frac{20}{R} + 4,482 R^2 \right) (0,0103 R + 0,007) 7800.$$

Найдем первую производную и, приравняв ее к нулю, получим

$$R^4 + 0,455 R^3 - 1,015 = 0.$$

Решим данное уравнение графически, для чего перепишем его в следующем виде:

$$\begin{aligned} Y &= R^4 \\ X &= 1,015 - 0,455 R^3. \end{aligned}$$

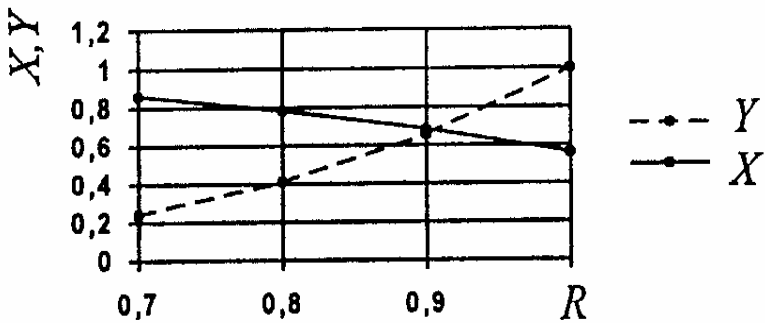
По результатам расчета заполним табл. 2.2. и построим график (рис. 2.18.), который позволяет найти решение с достаточной для инженерных целей точностью.

В данном случае решение уравнения находится между 0,90 и 0,91 м. Принимаем ближайший стандартный размер $R_{\text{опт}} = 0,90 \text{ м}$, тогда $H_{\text{опт}} = 3,33 \text{ м}$.

Таблица 2.2

Результаты расчета

R	Y	X
0,7	0,240	0,860
0,8	0,410	0,782
0,9	0,656	0,683
0,91	0,686	0,672
1,0	1,000	0,560



Р и с. 2.18. Графическое нахождение решения уравнения

Глава 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗОК ОТ МАССЫ АППАРАТОВ

Корректный выбор размеров основных конструктивных элементов аппаратов, а также подбор соответствующих грузоподъемных механизмов при проведении ремонтных и монтажных работ возможен только в том случае, когда известны действующие нагрузки. Одними из основных являются нагрузки от собственной массы и от массы продукта, содержащегося в объеме аппарата.

В данной главе рассматриваются простые наиболее типичные элементы аппаратов. Необходимо помнить, что при решении реальной задачи используется расчетная схема, которая позволяет отбросить несущественные факторы и упростить решение.

При схематизации реальных объектов часто следует сделать упрощения и в системе сил, приложенных к элементу конструкции, например, распределенная нагрузка заменяется сосредоточенной силой, приложенной в определенной точке. Замена распределенных сил сосредоточенной равнодействующей возможна, когда проводится расчет объекта в целом.

Поскольку геометрически аппараты чаще всего представляют собой сочетание пластин и различных оболочек вращения, то необходимо уметь рассчитывать массу и находить положение центров тяжести конструктивных элементов, а также массу и положение центров тяжести содержимого. Итогом данных расчетов являются масса реальных технологических аппаратов и координаты центра тяжести.

Знание массы отдельных элементов и положение центров тяжести позволяет составлять расчетные схемы, по которым можно производить оптимизацию конструкции или выбирать схемы монтажа оборудования, определять нагрузки на монтажные механизмы, рассчитывать отдельные приспособления и т.д.

В результате расчета нужно получить ответы на вопросы, удовлетворяет или нет конструкция требованиям надежности и является ли решение оптимальным.

Основные методы решения задач данного раздела уже были рассмотрены ранее в курсах высшей математики и сопротивления материалов.

3.1. Статические моменты пластины

Возьмем некоторую пластину, изготовленную из однородного материала, свяжем с системой координат x , y и рассмотрим два следующих интеграла:

$$S_x = \int_F y dF ,$$
$$S_y = \int_F x dF ,$$

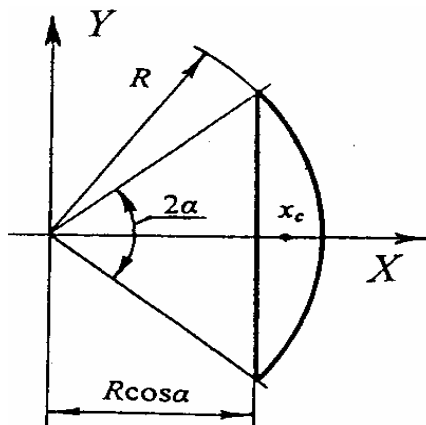
где индекс F у знака интеграла указывает на то, что интегрирование ведется по всей площади пластины. Каждый из интегралов представляет собой сумму произведений элементарных площадок dF на расстояние до соответствующей оси (x или y).

Первый интеграл называется статическим моментом относительно оси x , а второй – относительно оси y [7]. Ось, относительно которой статический момент равен нулю, называется центральной, а точка пересечения таких осей – центром тяжести пластины.

Таким образом, координаты центра тяжести однородной пластины определяются следующими соотношениями:

$$x_c = \frac{S_y}{F} ,$$
$$y_c = \frac{S_x}{F} .$$

В качестве примера определим координаты центра тяжести кругового сегмента радиусом R с центральным углом 2α (рис. 3.1.).



Р и с. 3.1. Схема к расчету координат центра тяжести

Из условия симметричности сегмента относительно оси x следует, что $y_c = 0$. Для нахождения x_c рассчитаем статический момент относительно оси y .

$$S_y = \int_F x dF = \int_{R \cos \alpha}^R x dF.$$

Из уравнения окружности $x^2 + y^2 = R^2$ следует $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, тогда $dF = 2y dx = 2\sqrt{R^2 - x^2} dx$.

Использував полученное значение dF , найдем S_y .

$$\begin{aligned} S_y &= 2 \int_{R \cos \alpha}^R x \sqrt{R^2 - x^2} dx = -\frac{2}{3} (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{R \cos \alpha}^R = \\ &= \frac{2}{3} (R^2 - R^2 \cos^2 \alpha)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} R^3 \sin^3 \alpha. \end{aligned}$$

Площадь пластины подсчитывается так:

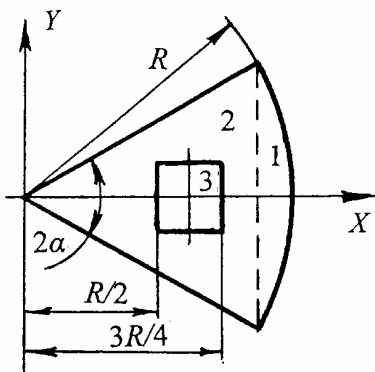
$$\begin{aligned}
 F &= \int_F dF = 2 \int_{R \cos \alpha}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \\
 &= 2 \left(\frac{x}{2} \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x}{R} \right) \Bigg|_{R \cos \alpha}^R = \\
 &= \frac{R^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha).
 \end{aligned}$$

Окончательно абсцисса центра тяжести определится так:

$$x_c = \frac{S_y}{F} = \frac{2 \cdot 2R^3 \sin^3 \alpha}{3R^2(2\alpha - \sin 2\alpha)} = \frac{4R \sin^3 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)}.$$

Для полуокруга $2\alpha = \pi$ и тогда $x_c = 4R/3\pi$.

Аналогично можно определить и положение центра тяжести пластины более сложной формы, например, кругового сектора с квадратным отверстием (рис. 3.2.).



Р и с. 3.2. Схема кругового сектора с отверстием

Разбиваем пластину на три простейшие фигуры: круговой сегмент 1, равнобедренный треугольник 2 и квадратное отверстие 3. Выбираем систему осей x и y и определяем координаты центров тяжести составляющих фигур. Ординаты центров тяжести всех составляющих фигур расположены на оси симметрии x , т. е. $y_{c_1} = y_{c_2} = y_{c_3} = y_c = 0$.

Абсцисса центра тяжести сегмента уже была определена в предыдущей задаче. Центр тяжести равнобедренного треугольника, как известно из школьного курса, расположен на расстоянии $2/3$ высоты от его вершины, а центр тяжести квадрата на пересечении его осей симметрии (или диагоналей). Определяем статический момент составной фигуры как алгебраическую сумму статических моментов составляющих фигур:

$$S_y = S_{y_1} + S_{y_2} - S_{y_3} = F_1 x_{c_1} + F_2 x_{c_2} - F_3 x_{c_3}.$$

Значение S_{y_1} было подсчитано в предыдущем примере, остальные величины равны:

$$S_{y_2} = \frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha \cdot \frac{2}{3} R \cos \alpha = \frac{2}{3} R^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha,$$

$$S_{y_3} = \frac{R}{4} \cdot \frac{R}{4} \left(\frac{R}{2} + \frac{R}{8} \right) = \frac{5}{128} R^3.$$

Таким образом, находим

$$S_y = \frac{2}{3} R^3 \sin^3 \alpha + \frac{2}{3} R^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \frac{5}{128} R^3.$$

После преобразования и упрощения равенства получаем

$$S_y = R^3 \left(\frac{2}{3} \sin \alpha - \frac{5}{128} \right).$$

Площадь составной фигуры

$$F = F_1 + F_2 - F_3 = \\ = \frac{R^2}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha) + \frac{R^2}{2}\sin 2\alpha - \frac{R^2}{16}.$$

Приведя подобные члены, получим

$$F = R^2 \left(\alpha - \frac{1}{16} \right).$$

Окончательно имеем

$$x_c = \frac{S_y}{F} = R \frac{\frac{2}{3}\sin \alpha - \frac{5}{128}}{\alpha - \frac{1}{16}} = R \frac{256\sin \alpha - 15}{24(16\alpha - 1)}.$$

3.2. Нахождение центров тяжести оболочек вращения

Многообразные геометрические и физические величины выражаются двойным или тройным интегралом, смотря по тому, относятся ли они к поверхности (плоской или кривой), т.е. оболочке, или к пространственному телу. Из математики [1] известно, что координаты центра тяжести однородной оболочки

$$x_c = \frac{\iint_D x d\sigma}{\iint_D d\sigma}; y_c = \frac{\iint_D y d\sigma}{\iint_D d\sigma}; z_c = \frac{\iint_D z d\sigma}{\iint_D d\sigma}.$$

Воспользуемся данными соотношениями для нахождения центра тяжести пластины по рис. 3.1.

Определяем числитель выражения

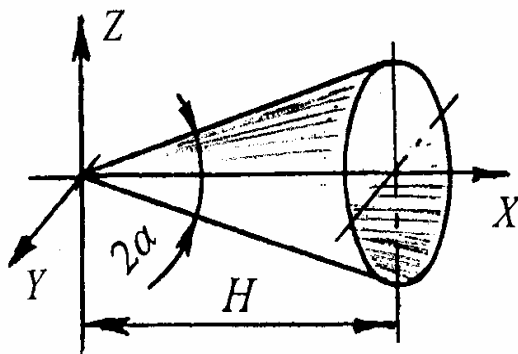
$$\iint_D x d\sigma = \int_{R \cos \alpha}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} x dy = 2 \int_{R \cos \alpha}^R x \sqrt{R^2-x^2} dx = \frac{2}{3} R^3 \sin^3 \alpha.$$

Знаменатель выражения представляет собой следующее:

$$\iint_D d\sigma = \int_{R \cos \alpha}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy = 2 \int_{R \cos \alpha}^R \sqrt{R^2-x^2} dx = \frac{R^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha).$$

Таким образом, с помощью двойного интеграла получены те же самые выражения, что и в предыдущем разделе.

С использованием данных соотношений и формул для определения поверхностей оболочек вращения [8] найдем положение центра тяжести конической оболочки (рис. 3.3), которая часто используется как днище аппаратов для хранения сыпучих материалов или конический переход для цилиндрических аппаратов переменного сечения по длине (высоте).



Р и с. 3.3. Коническая оболочка

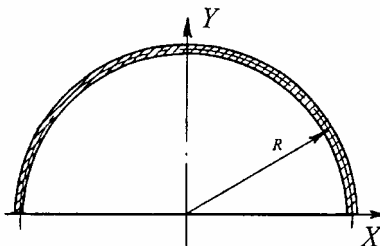
Из условия симметричности оболочки $y_c = z_c = 0$.

Уравнение образующей конуса в плоскости xOy запишется в виде $y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha$, а производная $y' = \operatorname{tg} \alpha$, тогда абсцисса x_c равна

$$x_c = \frac{\iint_D x d\sigma}{\iint_D d\sigma} = \frac{\int_0^H x 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} dx}{\int_0^H 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} dx} =$$

$$= \frac{\int_0^H x 2\pi x \operatorname{tg} \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} dx}{\int_0^H 2\pi x \operatorname{tg} \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} dx} = \frac{\int_0^H x^2 dx}{\int_0^H x dx} = \frac{2}{3} H.$$

При решении задач по определению нагрузок от собственной массы для реальных технологических аппаратов нефтедобывающей и нефтеперерабатывающей промышленности наиболее часто встречаются оболочки цилиндрические, конические, сферические, в форме эллипсоида вращения. Инженер-механик должен уметь находить положение центра тяжести как любой из этих оболочек, так и какой-либо части оболочки.



Р и с. 3.4. Полусферическое днище

В качестве примера, найдем положение центра тяжести полусферического днища радиусом R (рис. 3.4).

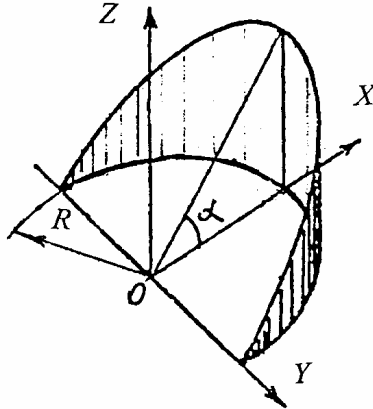
Образующей днища является окружность, уравнение которой $x^2 + y^2 = R^2$, тогда $x = \sqrt{R^2 - y^2}$, а производная $x' = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - y^2}}$. Подставив эти значения в начальное уравнение для определения положения центра тяжести, получим

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{\int_0^R y 2\pi \sqrt{R^2 - y^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-y}{\sqrt{R^2 - y^2}} \right)^2} dy}{\int_0^R 2\pi \sqrt{R^2 - y^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-y}{\sqrt{R^2 - y^2}} \right)^2} dy} = \\ &= \frac{2\pi \int_0^R y \sqrt{R^2 - y^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} dy}{2\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - y^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} dy} = \frac{\int_0^R y dy}{\int_0^R dy} = \frac{R}{2}. \end{aligned}$$

В завершение данной темы найдем координаты центра тяжести части цилиндрической оболочки в формы "цилиндрического копыта" (рис. 3.5.), которая на практике представляет собой половину цилиндрического днища какого-либо аппарата. Боковая поверхность данной оболочки равна $S = 2R^2 \text{tg} \alpha$ (см. табл. 2.1).

Из условия симметричности $y_c = 0$. Для нахождения оставшихся координат рассчитаем соответствующие статические моменты.

$$\iint_D x d\sigma = \iint_D x \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dz dx =$$



Р и с. 3.5. "Цилиндрическое копыто"

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^R dx \int_0^{x \operatorname{tg} \alpha} x \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right)^2} dz = \int_0^R dx \int_0^{x \operatorname{tg} \alpha} x \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dz = \\
 &= R \operatorname{tg} \alpha \int_0^R \frac{x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \frac{\pi}{4} R^3 \operatorname{tg} \alpha .
 \end{aligned}$$

Таким образом, $x_c = \pi \cdot R / 8$.

$$\begin{aligned}
 \iint_D z d\sigma &= \iint_D z \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dz dx = \\
 &= \int_0^R dx \int_0^{x \operatorname{tg} \alpha} z \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dz = \int_0^R \frac{R x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \sqrt{R^2 - x^2}} dx = \frac{\pi}{8} R^3 \operatorname{tg}^2 \alpha .
 \end{aligned}$$

Значение последней координаты $z_c = \frac{\pi}{16} R \operatorname{tg} \alpha$.

Сведения по расположению центров тяжести различных оболочек вращения представлены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

**Координаты центров тяжести некоторых
оболочек вращения**

Оболочка	Обозначение	Формулы
Полусферическое днище (рис. 3.4)	R – радиус сферы	$y_c = R/2$ от основания
Стандартное эллиптическое днище (рис. 2.17)	R – радиус аппарата, $H_o = R/2$ – высота днища	$y_c = H_o/2 = R/4$ от основания
Полый конус	R – радиус основания, H – высота конуса	$y_c = H/3$ от основания
Полый усеченный конус	R – радиус бóльшего основания, H – высота усеченного конуса, r – радиус меньшего основания.	$A = R^2(R - r)^2$ $B = r^2(R - r)^2$ $C = \sqrt{A + R^2 H^2}$ $D = \sqrt{B + r^2 H^2}$ $E = \frac{CR^2 - Dr^2}{CR - Dr}$ $y_c = \frac{H}{R - r} \left(R - \frac{2}{3} E \right)$ от бóльшего основания
"Цилиндрическое копыто" (рис. 3.5)	R – радиус цилиндра, α – угол наклона верхней плоскости	$x_c = \frac{\pi}{8} R$ $z_c = \frac{\pi}{16} R \operatorname{tg} \alpha$

3.3. Нахождение центров тяжести пространственных тел

Координаты центра тяжести сплошного однородного тела определяются из соотношений

$$x_c = \frac{\iiint_V x dv}{\iiint_V dv}; y_c = \frac{\iiint_V y dv}{\iiint_V dv}; z_c = \frac{\iiint_V z dv}{\iiint_V dv}.$$

Найдем положение центра тяжести полушара, полученного разрезанием шара на две части плоскостью xOy . Из условия симметричности тела $x_c = y_c = 0$. Объем полушара

$V = \iiint_V dv = \frac{2}{3}\pi R^3$. Статический момент полушара равен

$$\iiint_V z dv = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z dz$$

или как тела вращения (что много проще для вычисления в данном случае)

$$\iiint_V z dv = \pi \int_0^R (R^2 - z^2) dz = \pi R^2 \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_0^R - \pi \frac{z^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi}{4} R^4.$$

Окончательно имеем $z_c = 3R/8$.

В завершение, найдем координаты центра тяжести сплошного однородного "цилиндрического копыта" расположенного как показано на рис. 3.5. Уравнение верхней секущей плоскости $z = x \operatorname{tg} \alpha$. Объем, найденный ранее, равен

$$V = \frac{2}{3} R^3 \operatorname{tg} \alpha.$$

Определяем статические моменты

$$\iiint_V x dv = \int_{-R}^R dy \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} dx \int_0^{x \operatorname{tg} \alpha} x dz = \int_{-R}^R dy \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} x^2 \operatorname{tg} \alpha \cdot dx =$$

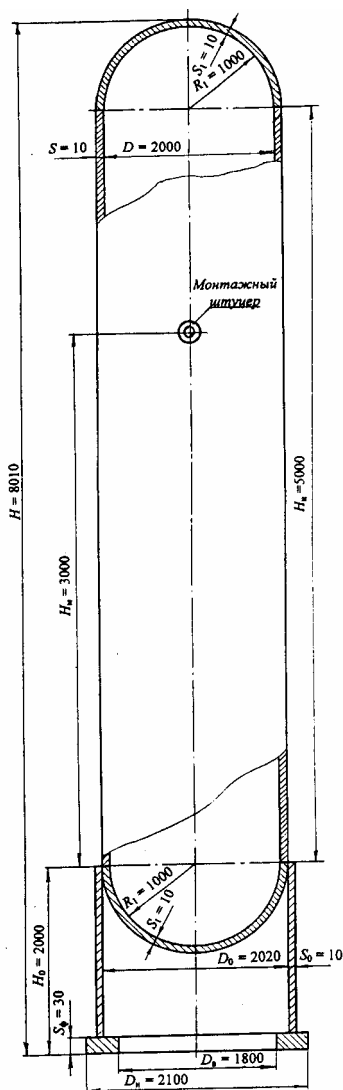
$$\begin{aligned}
&= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{3} \int_{-R}^R (R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} dy = \frac{\pi}{8} R^4 \operatorname{tg} \alpha . \\
\iiint_V z dv &= \int_{-R}^R dy \int_0^{\sqrt{R^2 - y^2}} dx \int_0^{x \operatorname{tg} \alpha} z dz = \int_{-R}^R dy \int_0^{\sqrt{R^2 - y^2}} \frac{x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2} dx = \\
&= \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{6} \int_{-R}^R (R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} dy = \frac{\pi}{16} R^4 \operatorname{tg} \alpha .
\end{aligned}$$

Таблица 3.2

Координаты центров тяжести некоторых тел вращения

Тело вращения	Обозначение	Формулы
Полушар	R – радиус шара	$y_c = 3R/8$ от основания
Полуэллипсоид вращения	R – радиус вращения полуэллипсоида, $H = R/2$ – высота полуэллипсоида	$y_c = 3H/8 = 3R/16$ от основания
Сплошной конус	R – радиус основания, H – высота конуса	$y_c = H/4$ от основания
Сплошной усеченный конус	R – радиус бóльшего основания, H – высота усеченного конуса, r – радиус меньшего основания	$A = R - \frac{3}{4} B$ $B = \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}$ $y_c = \frac{H}{R - r} \cdot A$ от бóльшего основания
Сплошное "цилиндрическое копыто" (с системой координат по рис. 2.5.)	R – радиус цилиндра, α – угол наклона верхней плоскости	$x_c = \frac{3\pi}{16} R$ $z_c = \frac{3\pi}{32} R \operatorname{tg} \alpha$
Круглая пластина	R – радиус пластины	В центре пластины

3.4. Расчет усилий при монтаже оборудования



Р и с. 3.6. Схема аппарата

Умение находить положение центров тяжести отдельных элементов оборудования позволяет проводить расчеты по определению реакций опор и нагрузок на грузоподъемные средства, что всегда необходимо при составлении проекта производства работ по ремонту или монтажу различных аппаратов.

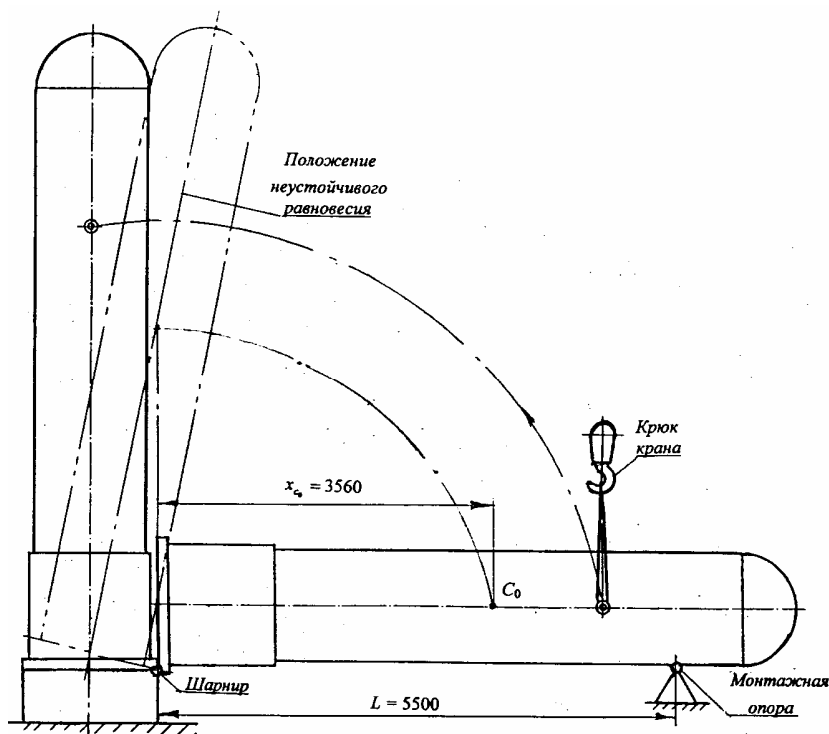
Рассмотрим простейшую реальную задачу. Изготовленный на специализированном предприятии аппарат (рис. 3.6.) доставлен на место эксплуатации и "выложен" в предмонтажное положение в соответствии со схемой (рис. 3.7.). Необходимо провести гидравлическое испытание аппарата и перевести его в рабочее положение методом поворота вокруг шарнира.

Для проверки возможности осуществления данных операций и выбора величины грузоподъемности монтажного крана необходимо выполнить следующие расчеты:

1. Определить массу и положение центра тяжести пустого аппарата.

2. Определить массу и положение центра тяжести аппарата в условиях гидравлического испытания (аппарата, заполненного водой).

3. Определить угол неустойчивого равновесия аппарата (для определения момента включения тормозной лебедки).



Р и с. 3.7. Предмонтажное положение аппарата

Для ответа на поставленные вопросы мысленно разделим аппарат на следующие основные части: фундаментное кольцо (1), опорную цилиндрическую обечайку (2), нижнее полусферическое днище (3), цилиндрическую часть корпуса аппарата (4) и верхнее полусферическое днище (5).

За начало координат примем подошву фундаментного кольца, центр тяжести пустого аппарата обозначим C_0 .

Найдем массу и положение центров тяжести отдельных элементов.

Для фундаментного кольца

$$M_1 = \frac{\pi}{4} (D_n^2 - D_e^2) S_\phi \rho,$$

где $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ – плотность стали.

$$M_1 = \frac{\pi}{4} (2,10^2 - 1,80^2) 0,03 \cdot 7800 = 215 \text{ кг};$$

$$x_{c_1} = 0,015 \text{ м.}$$

Для опорной обечайки

$$\begin{aligned} M_2 &= \pi (D_0 + S_0) (H_0 - S_\phi) S_0 \rho = \\ &= \pi (2,02 + 0,01) (2,00 - 0,03) 0,01 \cdot 7800 = 980 \text{ кг}; \\ x_{c_2} &= S_\phi + \frac{H_0 - S_\phi}{2} = 0,03 + \frac{2,00 - 0,03}{2} = 1,015 \text{ м.} \end{aligned}$$

Характеристики нижнего днища

$$\begin{aligned} M_3 &= 2\pi \left(R_1 + \frac{S_1}{2} \right)^2 S_1 \rho = \\ &= 2\pi \left(1,00 + \frac{0,01}{2} \right)^2 0,01 \cdot 7800 = 495 \text{ кг}; \\ x_{c_3} &= H_0 - \frac{1}{2} \left(R_1 + \frac{S_1}{2} \right) = 2,00 - \frac{1}{2} \left(1,00 + \frac{0,01}{2} \right) = 1,503 \text{ м.} \end{aligned}$$

Масса и положение центра тяжести цилиндрической части корпуса аппарата

$$\begin{aligned}
 M_4 &= \pi(D+S)H_y S \rho = \\
 &= \pi(2,00 + 0,01)5,00 \cdot 0,01 \cdot 7800 = 2465 \text{ кг}; \\
 x_{c_4} &= H_0 + \frac{H_y}{2} = 2,00 + \frac{5,00}{2} = 4,50 \text{ м.}
 \end{aligned}$$

Масса верхнего днища $M_5 = M_3 = 495$ кг, а положение центра тяжести

$$\begin{aligned}
 x_{c_5} &= H_0 + H_y + \frac{1}{2} \left(R_1 + \frac{S_1}{2} \right) = \\
 &= 2,00 + 5,00 + \frac{1}{2} \left(1,00 + \frac{0,01}{2} \right) = 7,503 \text{ м.}
 \end{aligned}$$

Масса пустого аппарата

$$\begin{aligned}
 M_0 &= \sum M_i = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 = \\
 &= 215 + 980 + 495 + 2465 + 495 = 4650 \text{ кг.}
 \end{aligned}$$

Координаты центра тяжести пустого аппарата

$$\begin{aligned}
 x_{c_0} &= \frac{\sum M_i x_{c_i}}{M_0} = \\
 &= \frac{215 \cdot 0,015 + 980 \cdot 1,015 + 495 \cdot 1,503}{4650} + \\
 &+ \frac{2465 \cdot 4,50 + 495 \cdot 7,503}{4650} = 3,56 \text{ м}
 \end{aligned}$$

Для нахождения нагрузки на крюк крана найдем сумму моментов относительно оси шарнира, тогда

$$Q_{кр} = M_0 g \frac{x_{c_0}}{L} = 4650 \cdot 9,8 \frac{3,56}{5,50} = 29500 \text{ Н.}$$

Рассчитаем массу и положение центра тяжести воды в объеме аппарата во время гидравлического испытания.

Масса воды в объеме нижнего днища

$$M_3^e = \frac{2}{3} \pi R_1^3 \rho_e$$

где $\rho_e = 1000 \text{ кг/м}^3$ – плотность воды.

$$M_3^e = \frac{2}{3} \pi \cdot 1,00^3 \cdot 1000 = 2095 \text{ кг.}$$

Положение центра тяжести воды в объеме нижнего днища

$$x_{c_3}^e = H_0 - \frac{3}{8} R_1 = 2,00 - \frac{3}{8} 1,00 = 1,625 \text{ м.}$$

Для воды в объеме цилиндрической части корпуса аппарата

$$M_4^e = \frac{\pi}{4} D^2 H_y \rho_e = \frac{\pi}{4} 2,00^2 \cdot 5,00 \cdot 1000 = 15710 \text{ кг.}$$

$$x_{c_4}^e = H_0 + \frac{H_y}{2} = 2,00 + \frac{5,00}{2} = 4,50 \text{ м.}$$

Для верхнего днища $M_5^e = M_3^e = 2095 \text{ кг}$, а координата центра тяжести

$$x_{c_5}^e = H_0 + H_y + \frac{3}{8} R_1 = 2,00 + 5,00 + \frac{3}{8} 1,00 = 7,375 \text{ м.}$$

Масса воды в объеме аппарата

$$M^e = \sum M_i^e = 2095 + 15710 + 2095 = 19900 \text{ кг.}$$

Координаты центра тяжести воды

$$\begin{aligned} x_c^e &= \frac{\sum M_i^e x_{c_i}^e}{M^e} = \\ &= \frac{2095 \cdot 1,625 + 15710 \cdot 4,50 + 2095 \cdot 7,375}{19900} = 4,50 \text{ м.} \end{aligned}$$

Масса аппарата в условиях гидравлического испытания

$$M_{\Gamma} = M_0 + M^e = 4650 + 19900 = 24550 \text{ кг.}$$

Нагрузка на монтажную опору

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{M}} &= \frac{(M_0 x_{c_0} + M^e x_c^e)g}{L} = \\ &= \frac{(4650 \cdot 3,56 + 19900 \cdot 4,50) \cdot 9,8}{5,50} = 189040 \text{ Н.} \end{aligned}$$

Нагрузка на шарнир во время гидравлического испытания

$$\begin{aligned} R_{ш} &= M_0 \cdot g + M^e \cdot g - R_{\mathcal{M}} = \\ &= 4650 \cdot 9,8 + 19900 \cdot 9,8 - 189040 = 51532 \text{ Н.} \end{aligned}$$

Угол неустойчивого равновесия φ определим как отклонение оси аппарата от вертикали в момент, когда центр тяжести аппарата и ось шарнира будут находиться на одной вертикальной прямой. Для данного положения справедливо равенство $\operatorname{tg} \varphi = \frac{D_{ш}}{2x_{c_0}}$, таким образом $\varphi = \arctg \frac{2,10}{3,56} = 30,5^\circ$.

3.5. Расчет усилий при подъеме несимметричного оборудования

В практике монтажа встречаются случаи подъема оборудования со смещенным центром тяжести. Нагрузка на грузоподъемные механизмы и такелажную оснастку при этом распределяется неравномерно, поэтому для их выбора нужны дополнительные расчеты [9].

В первую очередь находится положение центра тяжести поднимаемого груза в соответствии с ранее рассмотренными правилами.

Затем находят усилия, возникающие в подъемных средствах (реакции опор).

По найденным усилиям подбирают и рассчитывают подъемные средства – краны, тросы, полиспасты, домкраты и прочее оборудование.

Последовательность расчета рассмотрим на примере рис. 3.8.

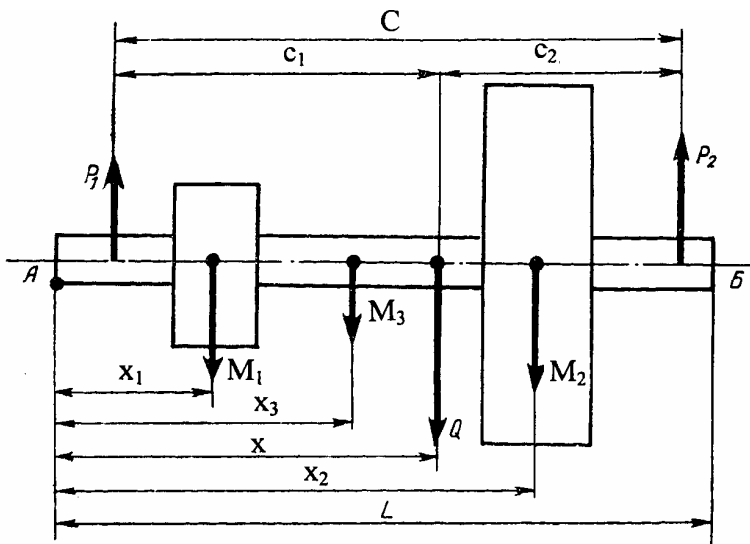
Рассчитать такелажную оснастку для подъема ступенчатого ротора турбины общей массой $M = 25\,000$ кг и общей длиной $L = 6$ м, если известно, что масса отдельных узлов ротора составляет:

- первого рабочего колеса M_1 6000 кг;
- второго рабочего колеса M_2 14000 кг;
- вала ротора M_3 5000 кг.

Расстояние от центров тяжести этих узлов до точки А: $x_1 = 1,5$ м; $x_2 = 4,5$ м; $x_3 = 3,5$ м.

Положение центра тяжести ротора в сборе можно рассчитать по формуле

$$x = \frac{\sum M_i x_i}{\sum M_i} = \frac{6000 \cdot 1,5 + 14000 \cdot 4,5 + 5000 \cdot 3,5}{6000 + 14000 + 5000} = 3,58 \text{ м.}$$



Р и с. 3.8. Расчетная схема подъема несимметричного ротора

Примем, что места строповки ротора смещены от концов вала на 0,25 м, тогда $C = 5,5$ м, $c_1 = 3,33$ м, $c_2 = 2,17$ м.

Найдя суммы моментов относительно точек приложения реакций опор, рассчитаем усилия, возникающие в такелажной оснастке у мест строповки:

$$P_1 = \frac{M \cdot g \cdot c_2}{C} = \frac{25000 \cdot 9,8 \cdot 2,17}{5,5} = 96660 \text{ Н.}$$

$$P_2 = \frac{M \cdot g \cdot c_1}{C} = \frac{25000 \cdot 9,8 \cdot 3,33}{5,5} = 148340 \text{ Н.}$$

В сумме реакции опор равны весу аппарата, т.е. расчет, выполнен правильно.

Подъем ротора может выполняться двумя стреловыми кранами грузоподъемностью 10 и 16 т. Марки кранов выбираются по справочникам.

3.6. Оптимальное расположение опор горизонтальных аппаратов

Горизонтальные аппараты работают в условиях воздействия изгибающих нагрузок, которые существенно изменяются по длине. Поэтому важно установить оптимальные параметры – соотношение расстояния между опорами и характеристиками поперечного сечения аппарата. Нахождение оптимального расстояния между опорами составляет одну из существенных частей расчета на прочность горизонтальных цилиндрических аппаратов. На практике аппарат часто рассматривают как балку на двух или трех опорах с равномерно распределенной нагрузкой по длине. Обычно расчет начинают с определения приведенной длины, заменяя высоту выпуклых днищ соответствующей длиной цилиндра, по какой-либо приближенной формуле. Иногда на практике в расчет вводят полную длину сосуда или аппарата. Умение находить массу (или вес) отдельных частей аппаратов и положение центров тяжести позволяет составить эквивалентную расчетную схему, которая будет включать как равномерно распределенную нагрузку, так и сосредоточенные силы взамен неравномерно распределенной нагрузки.

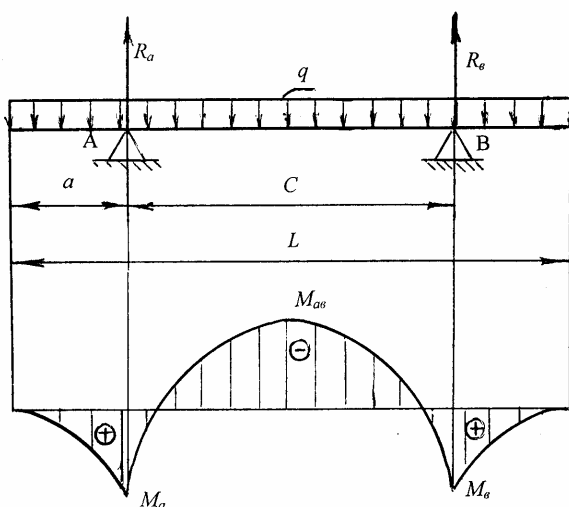
В качестве примера рассмотрим балку на двух опорах с равномерно распределенной нагрузкой $q = P/L$, где P – вес балки, L – длина балки (рис. 3.9).

Реакции опор $R_a = R_b = \frac{qL}{2}$. Изгибающие моменты на опорах

$M_a = M_b = \frac{qa^2}{2}$. Изгибающий момент между опорами имеет

максимальное значение в середине пролета и равен

$$M_{as} = \frac{qL^2}{8} - R_a \left(\frac{L}{2} - a \right) = \frac{qL}{2} \left(a - \frac{L}{4} \right).$$



Р и с. 3.9. Расчетная схема балки

Наиболее благоприятные условия работы балки наблюдаются, если выполняется равенство $|M_a| = |M_b| = |M_{ax}|$. Распишем данное равенство более подробно и определим оптимальное значение длины консольной части $a_{\text{опт}}$.

$$\frac{qa_{\text{опт}}^2}{2} = -\frac{qL}{2} \left(a_{\text{опт}} - \frac{L}{4} \right)$$

или

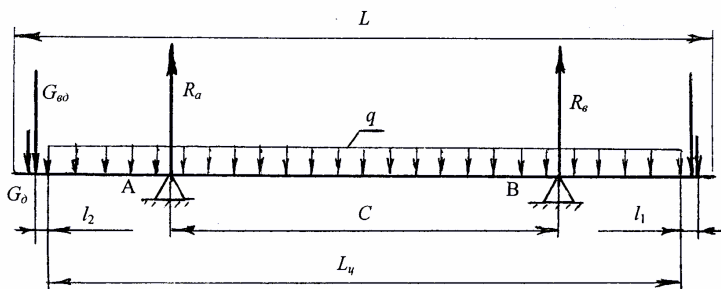
$$a_{\text{опт}} = 0,207L.$$

Найдем оптимальное расстояние между опорами горизонтальной цилиндрической емкости для хранения воды с двумя стандартными эллиптическими днищами внутренним диаметром $D = 2600$ мм, длиной $L = 13500$ мм и толщиной стенок корпуса и днищ $S = 12$ мм.

Выпуклая эллиптическая часть стандартного днища имеет высоту $H_d = D/4 = 650$ мм, тогда длина цилиндрической

части $L_u = L - 2H_0 = 13500 - 2 \cdot 650 = 12200$ мм. Удельный вес углеродистой стали $\gamma = 76500$ Н/м³. Вес цилиндрической части корпуса $G_u = \pi \cdot (D + S) \cdot S \cdot L_u \cdot \gamma = \pi \cdot (2,20 + 0,01) \cdot 0,01 \cdot 12,20 \cdot 76500 = 76526$ Н. Удельный вес воды $\gamma = 7800$ Н/м³. Вес воды в цилиндрической части корпуса устройства $G_{vu} = 0,785 D^2 \cdot L_u \cdot \gamma_v = 0,785 \cdot 2,60^2 \cdot 12,20 \cdot 9800 = 634779$ Н. Равномерно распределенная нагрузка $q = (G_u + G_{vu})/L_u = (76526 + 634779)/12,20 = 58300$ Н/м.

Вес эллиптической части днища $G_0 = 1,38\pi(D/2)^2 S \cdot \gamma = 1,38\pi(2,61/2)^2 \cdot 0,01 \cdot 76500 = 565$ Н. Вес воды в объеме эллиптической части днища $G_{v0} = \pi \cdot D^2 \cdot H_0 \cdot \gamma_v / 6 = \pi \cdot 1,30^2 \cdot 0,65 \cdot 9800 / 6 = 22720$ Н. Расстояние от основания эллиптической части днища до центра тяжести самого днища равно $l_1 = 0,328$ м, а для воды $l_2 = 0,246$ м. Расчетная схема данной емкости представлена на рис. 3.10.



Р и с. 3.10. Расчетная схема емкости

Проведя вычисления, аналогичные вычислениям предыдущего примера, получим $C = 7,50$ м. Таким образом, отношение длины консольной части к общей длине аппарата составляет 0,222, то есть изменение составляет 7%.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ЭЛЕМЕНТАМИ ДВИЖЕНИЯ В СИСТЕМЕ

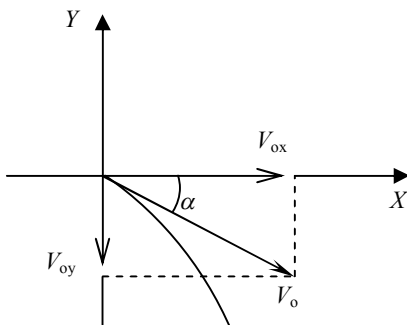
С движением твердых частиц или капель жидкости в химических и нефтяных технологиях приходится встречаться при работе многих машин и аппаратов: дробилок, сушилок, мельниц, оросителей, гидроклассификаторов, пылеосадительных камер, грохотов и др.

Однако характер движения материала в различном оборудовании не одинаков. В одних случаях частицы двигаются вертикально, в других – по более сложной траектории, в – третьих, они могут участвовать в нескольких движениях одновременно. Например: в барабанных мельницах частицы материала непрерывно поднимаются и затем падают по параболическим траекториям; в барабанных грохотах вся масса обычно перемещается как одно целое вдоль оси барабана, скользя по его поверхности; в оросительном стакане жидкость истекает из отверстий под некоторым углом к линии горизонта и т.п. Характер движения зависит от многих параметров и в каждом случае необходимо определяющие параметры выбирать таким образом, чтобы обеспечить определенный тип движения, наиболее соответствующий результатам, которые требуется получить.

При расчете оросительного стакана принимается во внимание необходимость обеспечения равномерного распределения жидкости по площади поперечного сечения аппарата, в пылеосадительной камере требуется достигнуть контакта пылевых частиц с полкой, в барабанной мельнице – максимальной скорости соударения мелющего тела с поверхностью барабана, во вращающихся барабанных печах необходимо обеспечить максимальную поверхность соприкосновения материала с теплоносителем и достаточное время пребывания материала в барабане и др.

4.1. Движение тела, брошенного под некоторым углом к линии горизонта

Рассмотрим движение тела (материальной точки), брошенного под углом α к линии горизонта с начальной скоростью V_0 (рис. 4.1.).



Р и с. 4.1. К выводу уравнения траектории движения

При отсутствии внешнего трения можно записать, что

$$\begin{aligned}V_x &= V_{0x} = V_0 \cdot \cos \alpha, \\V_y &= V_{0y} + dy/d\tau,\end{aligned}$$

где τ – время движения.

В поле земного тяготения

$$dy/d\tau = g \cdot \tau.$$

Таким образом,

$$V_y = V_{0y} + g \cdot \tau.$$

Координаты каждой точки траектории составляют

$$dx = V_x \cdot d\tau = V_0 \cdot \cos \alpha \cdot d\tau,$$

$$dy = V_y \cdot d\tau = V_0 \cdot \sin \alpha \cdot d\tau + g \cdot \tau \cdot d\tau.$$

В интегральном виде

$$y = \int dy = V_0 \cdot \tau \cdot \sin \alpha + g \cdot \tau^2 / 2 + C; y|_{\tau=0} = 0 \Rightarrow C = 0,$$

$$x = \int dx = V_0 \cdot \tau \cdot \cos \alpha + C_1; x|_{\tau=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0,$$

Окончательно

$$y = V_0 \cdot \tau \cdot \sin \alpha + g \cdot \tau^2 / 2;$$

$$x = V_0 \cdot \tau \cdot \cos \alpha.$$

Из второго уравнения следует

$$\tau = x / (V_0 \cdot \cos \alpha).$$

После подстановки в первое уравнение получаем

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot V_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}$$

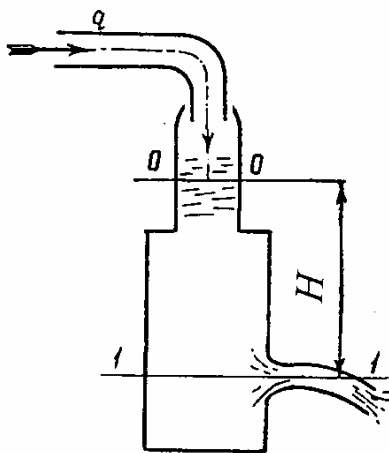
или в каноническом виде

$$y + \left(\frac{V_0 \cdot \sin \alpha}{\sqrt{2 \cdot g}} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2 \cdot g}}{2 \cdot V_0 \cdot \cos \alpha} x + \frac{V_0 \cdot \sin \alpha}{\sqrt{2 \cdot g}} \right)^2.$$

4.2. Теория низконапорного истечения жидкости из отверстия в тонкой стенке

Рассмотрим процесс истечения жидкости через отверстие в стенке оросительного стакана [10]. Движение жидкости

будет установившимся, если уровень и внешнее давление P будут поддерживаться постоянными. Из курса "Гидравлика" известно, что струя жидкости, вытекающая из отверстия в достаточно тонкой стенке, претерпевает сжатие на некотором расстоянии от стенки (рис. 4.2).



Р и с. 4.2. Схема истечения низконапорной струи

Отношение площади сечения f_c струи (в том месте, где заканчивается наибольшее сжатие) к площади f отверстия называется коэффициентом сжатия струи при истечении $\varepsilon = f_c/f$. Из опытных данных значение $\varepsilon = 0,60 - 0,64$.

Применим уравнение Бернулли для сечения 0-0 на свободной поверхности жидкости и 1-1 на оси отверстия. Предполагая, что сечение отверстия мало по сравнению с сечением сосуда, можно пренебречь скоростью жидкости в сосуда по сравнению со скоростью ее истечения. Тогда

$$H + \frac{P}{\gamma} = \frac{P}{\gamma} + \frac{V_{1-1}^2}{2g} + h_w,$$

где $h_w = \xi \frac{V_{1-1}^2}{2g}$ – потери напора на вход в отверстие (потерей на трение для тонкой стенки можно пренебречь).

Отсюда найдем скорость истечения жидкости

$$V = V_{1-1} = \varphi \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H},$$

где $\varphi = (1 + \xi)^{-\frac{1}{2}}$.

Для идеальной жидкости $\xi = 0$, $\varphi = 1$ и $V = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$. Это значит, что скорость истечения идеальной жидкости определяется так же, как скорость тела, свободно падающего с высоты H . Коэффициент φ , называется коэффициентом скорости (для тонкой стенки $\varphi = 0,97 - 0,99$).

Расход жидкости, вытекающей через отверстие, составляет

$$q = V f_c = V \cdot \varepsilon f = V \cdot \varepsilon \frac{\pi d_0^2}{4},$$

где d_0 – диаметр отверстия.

Подставляя найденное значение скорости истечения, получим

$$q = \varepsilon f \cdot \varphi \sqrt{2 \cdot g \cdot H} = \mu \frac{\pi d_0^2}{4} \sqrt{2 \cdot g \cdot H},$$

где $\mu = \varepsilon \cdot \varphi$ – коэффициент расхода, который определяется опытным путем (среднее значение $\mu = 0,62$).

Данное уравнение является основной расчетной формулой для определения расхода при истечении жидкости. Опыт показал, что при истечении через отверстие в тонкой стенке струя жидкости получается гладкой, если жидкость в сосуде

находится в спокойном состоянии, а напор H не превышает 3–4 м. Такая струя называется низконапорной.

При влиянии стенок сосуда или же если отверстие относительно велико наблюдается "несовершенное" сжатие струи, тогда коэффициент μ следует находить опытным путем.

Сближение кромок рядом расположенных отверстий до расстояния, равного их диаметру, практически не влияет на коэффициент расхода μ .

4.3. Траектория низконапорной струи

Траектория низконапорной струи совпадает с траекторией тела, брошенного под некоторым углом к линии горизонта. Если известна скорость истечения жидкости, уравнение траектории можно записать в следующем виде:

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{x^2}{4\varphi^2 H \cdot \cos^2 \alpha}.$$

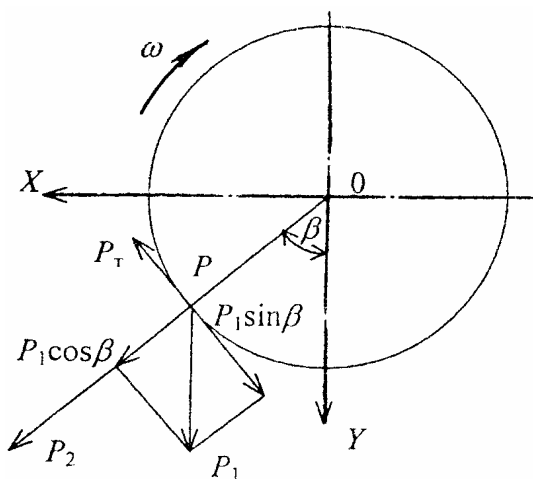
Это уравнение достаточно точно описывает траекторию струи жидкости до тех пор, пока струя не раздроблена, а сопротивление окружающей среды и противоток газа не воздействуют на ее полет (при скорости газа до 2,0 – 2,5 м/с).

4.4. Движение материальной частицы во вращающемся барабане

В промышленности находят широкое применение аппараты барабанного типа, в которых встречается практически одна и та же схема. Круговой цилиндрический барабан с бандажми лежит на роликовых опорах и получает движение от приводной станции. Ось барабана может быть горизонтальна или наклонена под небольшим углом к линии горизонта. Материал

подается с помощью какого-либо питателя в верхний конец аппарата. Вследствие вращения барабана и за счет сил трения материал пересыпается и постепенно продвигается к нижнему концу аппарата, где выгружается в виде, пригодном для дальнейшей обработки.

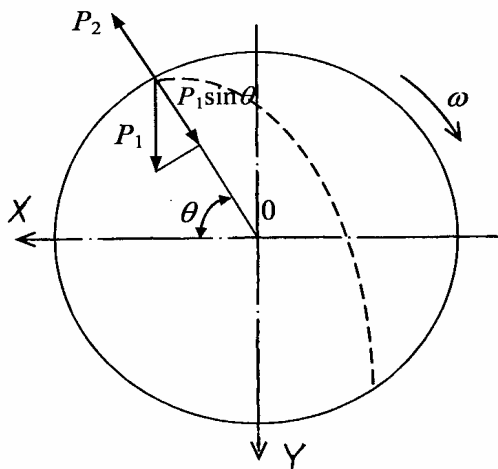
Характер движения обрабатываемого материала зависит от многих параметров: диаметра барабана, скорости его вращения, коэффициентов заполнения, внутреннего трения материала, а также от коэффициента трения материала о поверхность барабана f и угла наклона барабана к горизонту.



Р и с. 4.3. Сечение барабана

Для получения основных закономерностей движения рассмотрим нормальное сечение горизонтального круглого цилиндра радиусом R (рис. 4.3) с лежащей на его внутренней шероховатой поверхности точки P с массой m . При вращении цилиндра с угловой скоростью ω на точку действуют следующие силы: сила тяжести $P_1 = m \cdot g$, центробежная сила $P_2 = m \cdot \omega^2 \cdot R$ и сила трения $P_T = f(P_1 \cos \beta + P_2)$, величина которой зависит от положения точки на цилиндре. Под действием силы трения точка увлекается цилиндром и начинает вращаться вместе с

ним. При этом возможны следующие случаи. Точка P поднимается выше горизонтального диаметра цилиндра (рис. 4.4).



Р и с. 4.4. Расчетная схема барабана

В положении, характеризующимся углом $P0X = \theta$, на точку действуют направленная к центру составляющая силы тяжести, равная $P_1 \sin \theta = m \cdot g \cdot \sin \theta$, и центробежная сила $P_2 = m \cdot \omega^2 \cdot R$, направленная по радиусу от центра. Если угол θ таков, что $m \cdot g \cdot \sin \theta = m \cdot \omega^2 \cdot R$, т. е. если $\sin \theta = \omega^2 \cdot R / g$, тогда точка не будет прижата к барабану, отделится от него и упадет вниз на барабан по параболической траектории, как свободное тяжелое тело, брошенное со скоростью $V = \omega \cdot R$ под углом $(\pi/2 - \theta)$ к горизонту. Угол θ называется углом отрыва.

Если $\omega^2 \cdot R / g = 1$, то $\theta = \pi/2$. Точка достигнет высшего положения в цилиндре и, будет вращаться вместе с ним, нигде от него не отделяясь. Это тем более будет иметь место при $\omega^2 \cdot R / g > 1$, т.е. при $\omega^2 R > g$. Наименьшая скорость, при которой точка вращается вместе с цилиндром, представлена выражением

$$\omega_{kp} = \sqrt{g/R}.$$

Она называется критической скоростью барабана.

Рассмотрим теперь точку P в положении ниже горизонтального диаметра. Составляющая силы тяжести $P_1 \cdot \sin \beta$, направленная по касательной к цилиндру, стремится заставить точку соскользнуть вниз. Этому сопротивляется сила трения $P_T = f \cdot (m \cdot \omega^2 R + m \cdot g \cdot \cos \beta)$, вызываемая силами, прижимающими точку к цилиндру. Если $P_1 \cdot \sin \beta = P_T$, то

$$m \cdot g \cdot \sin \beta = f \cdot (m \cdot \omega^2 R + m \cdot g \cdot \cos \beta),$$

тогда точка остановится и будет скользить по вращающемуся цилиндру. Угол β называется углом подъема точки $\beta < \pi/2$.

Подставив в уравнение $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$, мы можем переписать его так: $g \sin \beta - f \omega^2 R = f g \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$.

Возведя обе части последнего уравнения в квадрат и решая его относительно $\sin \beta$ получим

$$\sin \beta = f \frac{\omega^2 R + \sqrt{g^2(1 + f^2) - f^2 \omega^4 R^2}}{g(1 + f^2)}.$$

Если $\omega \rightarrow 0$ (неподвижный барабан) и $f = \operatorname{tg} \varphi$ (φ - угол трения), то

$$\sin \beta = \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \operatorname{tg} \varphi \cos \varphi = \sin \varphi,$$

т.е. $\beta = \varphi$.

Очевидно, что угол β должен быть меньше $\pi/2$, так как точка на верхнем квадранте оставаться неподвижной не может, а может лишь или оторваться от барабана, или вращаться вме-

сти с ним; скорость вращения должна быть небольшой по сравнению с критической ($\omega < \omega_{кр}$).

4.5. Движение точки по барабану

Утверждение, что, достигнув уровня, соответствующего углу β , точка прекратит свое движение, не учитывает одного важного обстоятельства: коэффициент трения движения f_0 меньше коэффициента трения покоя f . Как только точка достигнет уровня, соответствующего углу β , определяемому уравнением, она остановится, а барабан продолжает вращаться. Точка скользит по барабану, коэффициент трения снижается с f до f_0 , условие равновесия нарушается и точка начинает скользить вниз, чтобы остановиться на новом уровне β_1 , соответствующем коэффициенту трения f_0 . По инерции точка скользнет несколько ниже β_1 и остановится на некотором уровне β_2 . Как только точка останавливается, опять возникает коэффициент трения f , и она снова начинает подниматься вместе с барабаном, чтобы, достигнув уровня β , опять начать скользить вниз и т.д. Таким образом, точка будет совершать некоторое колебательное движение вверх и вниз по барабану [11].

Обозначим угловую скорость движения точки по барабану через ω_0 , а соответствующий угол подъема — через ψ ($\psi \leq \beta$). Относительное ускорение точки, скользящей по барабану, складывается из двух составляющих: центробежной, направленной по радиусу барабана, равной $\omega_0^2 R$, и касательной

$$R \frac{d\omega_0}{dt} = R \frac{d\omega_0}{d\psi} \frac{d\psi}{dt} = R \omega_0 \frac{d\omega_0}{d\psi},$$

так как $\frac{d\psi}{dt}$ есть не что иное, как угловая скорость скользящей точки.

Переносное ускорение точки в ее совместном движении с барабаном дано центробежным ускорением $\omega^2 R$, где $\omega = \text{const}$. На точку действует также Кориолисово ускорение. Так как относительная скорость точки $V = \omega_0 R$, направленная по касательной, и вектор угловой скорости $\vec{\omega}$, направленный по оси барабана, между собой перпендикулярны, то Кориолисово ускорение $2\omega \cdot \omega_0 R$ направлено вдоль радиуса (нормально к $\vec{V}$ и $\vec{\omega}$).

Радиальные ускорения суммируются. Радиальная центробежная сила

$$m\omega^2 R + m\omega_0^2 R + 2m\omega\omega_0 R = m(\omega + \omega_0)^2 R,$$

прижимающая точку к барабану, создает силу трения, равную $f_0 m(\omega + \omega_0)^2 R$.

По касательной к траектории точки действуют сила

$$-m \frac{dV}{dt} = -mR \frac{d\omega_0}{dt} = -mR \frac{d\omega_0}{d\psi} \frac{d\psi}{dt} = -mR\omega_0 \frac{d\omega_0}{d\psi}$$

и составляющая силы тяжести $m \cdot g \cdot \sin \psi$. Следовательно, условие равновесия можно записать в таком виде:

$$mg \sin \psi - f_0 m [(\omega^2 + 2\omega\omega_0 + \omega_0^2)R + g \sin \psi] = -mR \frac{d\omega_0}{d\psi} \omega_0$$

или после преобразований

$$\frac{d\omega_0}{d\psi} - f_0 \omega_0 = \frac{g(f_0 \cos \psi - \sin \psi) + f_0 \omega^2 R}{\omega_0 R} + 2f_0 \omega.$$

Таким образом, мы получили уравнение движения точки по вращающемуся барабану.

Рассмотрим случай падения точки по стенке неподвижного барабана ($\omega=0$), который можно представить себе так:

$$\frac{d\omega_0}{d\psi} - f_0\omega_0 = \frac{g(f_0 \cos \psi - \sin \psi)}{R} \cdot \frac{1}{\omega_0},$$

т.е. мы получим уравнение типа уравнения Бернулли

$$\frac{d\omega_0}{d\psi} + u(\psi)\omega_0^m = v(\psi)\omega_0^m,$$

решение, которого известно

$$\omega_0^{1-m} = e^{-\int (1-m)ud\psi} \left[c + \int e^{\int (1-m)ud\psi} (1-m)v d\psi \right].$$

В данном случае имеем

$$u(\psi) = -f_0; v(\psi) = \frac{g}{R}(f_0 \cos \psi - \sin \psi); m = -1;$$

$$1 - m = 2; \int (1 - m)ud\psi = -2f_0\psi.$$

Подставляя эти значения в решение уравнения Бернулли и проведя интегрирование по частям, получим:

$$\begin{aligned} \int e^{-2f_0\psi} \cos \psi d\psi &= \int e^{-2f_0\psi} d(\sin \psi) = \\ &= e^{-2f_0\psi} \sin \psi + \int 2f_0 e^{-2f_0\psi} \sin \psi d\psi; \\ \int e^{-2f_0\psi} \sin \psi d\psi &= \int e^{-2f_0\psi} d(-\cos \psi) = \\ &= -e^{-2f_0\psi} \cos \psi - \int 2f_0 e^{-2f_0\psi} \cos \psi d\psi. \end{aligned}$$

Подставив последний интеграл в предыдущий, получим

$$\int e^{-2f_0\psi} \cos \psi d\psi = e^{-2f_0\psi} \sin \psi - 2f_0 e^{-2f_0\psi} \cos \psi - \\ - 4f_0^2 \int e^{-2f_0\psi} \cos \psi d\psi ,$$

откуда находим

$$(1+4f_0^2) \int e^{-2f_0\psi} \cos \psi d\psi = e^{-2f_0\psi} \sin \psi - 2f_0 e^{-2f_0\psi} \cos \psi; \\ \int e^{-2f_0\psi} \cos \psi d\psi = \frac{e^{-2f_0\psi} (\sin \psi - 2f_0 \cos \psi)}{1+4f_0^2}.$$

Аналогично подсчитаем

$$\int e^{-2f_0\psi} \sin \psi d\psi = -\frac{e^{-2f_0\psi} (\cos \psi + 2f_0 \sin \psi)}{1+4f_0^2}.$$

Возвращаясь к решению уравнения Бернулли с учетом подстановок получим

$$\omega_0^2 = e^{2f_0\psi} \left[C + \frac{2ge^{-2f_0\psi}}{R(1+4f_0^2)} (f_0 \sin \psi - 2f_0^2 \cos \psi + \cos \psi + 2f_0 \sin \psi) \right],$$

или

$$\omega_0^2 = \frac{2g}{R(1+4f_0^2)} [3f_0 \sin \psi + (1-2f_0^2) \cos \psi] + Ce^{2f_0\psi}.$$

Принимая во внимание, что в начале движения $\omega_0=0$, и полагая, что начальный угол $\psi = \psi_0 = \beta = \varphi$ (φ - угол трения покоя), имеем

$$0 = \frac{2g}{R(1+4f_0^2)} [3f_0 \sin \beta + (1-2f_0^2) \cos \beta] + Ce^{2f_0\beta},$$

откуда находим С.

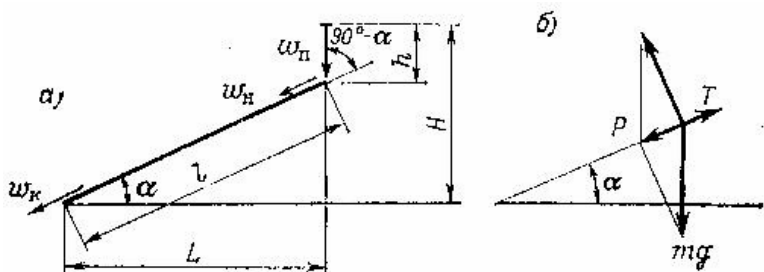
Подставив значение С в предыдущее уравнение получаем окончательно

$$\omega_0^2 = \frac{2g}{R(1+4f_0^2)} [3f_0(\sin \psi - \sin \beta e^{2f_0(\psi-\beta)}) + (1-2f_0^2)(\cos \psi - \cos \beta e^{2f_0(\psi-\beta)})].$$

Задаваясь значением $\psi \leq \beta$, можно по данному уравнению найти значения ω_0 . Линейная скорость скольжения точки определяется известным соотношением $V = \omega_0 R$.

4.6. Скорость скольжения материала по желобу

В производствах по переработке зернистых материалов часто подача материалов осуществляется каким-либо питателем на желоб, по которому они перемещаются в необходимую точку. Для нормальной работы устройства необходимо правильно выбрать угол наклона желоба и определить скорость скольжения материала на конце этого желоба. Расчетная схема устройства представлена на рис. 4.5.



Р и с. 4.5 Расчетная схема желоба

Поскольку материал, подаваемый питателем, имеет начальную скорость, то минимальный угол наклона желоба определится, как и при скольжении частиц материала по внутренней поверхности барабана, углом трения движения материала φ_0 . При ориентировочных расчетах можно принимать $\operatorname{tg} \varphi_0 = 0,8 \operatorname{tg} \varphi$ или $f_0 = 0,8f$ [12]. Следовательно, угол наклона желоба $\alpha > \varphi_0$.

Из рис. 4.5а находим, что начальная скорость движения материала по желобу $w_n = w_n \cos(90^\circ - \alpha)$, где w_n – скорость падения материала на желоб, которая с учетом геометрии устройства, составит $w_n = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g(H - Ltg\alpha)}$.

Найдем конечную скорость движения материала. Для этого рассмотрим равновесие частицы сыпучего материала на поверхности желоба (рис. 3.5 б). Частица массой m движется под действием двух сил: движущей силы $P = mg \sin \alpha$ и силы трения $T = f_0 mg \cos \alpha$. Так как $\alpha > \varphi_0$, материал будет двигаться с некоторым ускорением a , которое найдем из условия $P - T = ma$. С учетом геометрических соотношений $a = g(\sin \alpha - f_0 \cos \alpha)$. Поскольку движение равноускоренное, то конечная скорость движения $w_k = \sqrt{2al + w_n^2}$.

4.7. Осаждение под действием сил тяжести

Под действием сил тяжести может производиться очистка промышленных газов от взвешенных частиц для улавливания ценных продуктов или уменьшения загрязненности атмосферы.

Скорость осаждения одиночной шарообразной частицы при ламинарном режиме движения определяется по известной из курса физики формуле Стокса

$$w_{oc} = \frac{d^2(\gamma - \gamma_c)}{18\mu_c},$$

где d – диаметр шарообразной частицы, м;
 γ – удельный вес материала частицы, Н/м³;
 γ_c – удельный вес среды, Н/м³;
 μ_c – вязкость среды, Па·с.

При ориентировочных расчетах с учетом отличия реальных условий осаждения от теоретических (стесненность осаждения, отклонения от шарообразности формы, движение среды) действительную скорость осаждения можно принять равной половине теоретической скорости осаждения одиночной шарообразной частицы:

$$w = 0,5w_{oc}.$$

Аналогично можно определить скорость осаждения частиц в жидкой или газообразной среде и при других режимах движения [14].

4.8. Общие рекомендации к выбору аппарата для разделения суспензий

Выбор соответствующего аппарата – это широкая операция, включающая в себя выбор аппарата для разделения суспензии отстаиванием или центрифугированием в поле гравитационных или центробежных сил. Поэтому при выборе того или иного аппарата для разделения заданной суспензии следует одновременно решать вопрос о возможности и целесообразности применения отстойников, отстойных и фильтрующих центрифуг, центробежных сепараторов или гидроциклонов, различных фильтров.

Общие указания, которые могут быть использованы для первичной ориентации при выборе аппаратов для разделения суспензий, следующие:

- для суспензий, которые расслаиваются достаточно быстро и дают хорошо осветленную жидкость, пригодны отстойники;

- для суспензий с небольшой разностью плотностей твердой и жидкой фаз или небольшим размером твердых частиц используются центрифуги, сепараторы и гидроциклоны с соответствующим фактором разделения;

- для суспензий, не склонных к быстрому расслаиванию и разделяющихся с помощью пористых перегородок, могут быть использованы фильтры.

КОЛЕБАНИЯ И ВИБРОИЗОЛЯЦИЯ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

Теория колебаний имеет большое значение для прикладных задач, встречающихся в инженерной практике, например, первостепенное значение приобретают вопросы прочности конструкций при периодически действующих силах – в насосах, компрессорах, вентиляторах, центрифугах, грохотах и т.п.

Особый интерес представляют проблемы гашения колебаний и виброизоляции. Вообще поведение упругих систем под действием переменных нагрузок очень серьезная задача и требует от инженера особого подхода.

Упругие системы в технике в первую очередь различаются по числу степеней свободы [7]. Под числом степеней свободы понимается число независимых координат, определяющих положение системы. Например, груз, подвешенный на пружине, имеет одну степень свободы, поскольку его положение (с некоторыми допущениями) определяется только одной координатой y , отсчитываемой от некоторой точки. Система вала с жесткими дисками (если пренебречь массой вала) имеет две степени свободы – необходимо знать две угловые координаты, определяющие поворот дисков.

Таким образом, число степеней свободы фактически определяется выбором расчетной схемы, т.е. соответствующими упрощениями, вносимыми в практическую задачу.

При рассмотрении упругих колебаний различают колебания **собственные** и **вынужденные**.

Под *собственными* колебаниями понимается движение, которое совершает система, освобожденная от внешнего воздействия и предоставленная сама себе. В этом случае движение осуществляется под действием начального импульса. Собственные колебания продолжаются до тех пор, пока сообщенная

в начале колебательного движения энергия не будет полностью израсходована.

Вынужденными называются такие колебания упругой системы, которые происходят под действием изменяющихся внешних сил, называемых возмущающими. Примером вынужденных колебаний является движение упругого основания, если на нем работает не полностью сбалансированная машина. Сила, действующая на упругое основание со стороны машины, является возмущающей.

Промежуток времени между двумя последующими максимальными отклонениями упругой системы от положения равновесия называется периодом собственных или вынужденных колебаний системы и обозначается, буквой T . Обратная периоду величина называется частотой колебаний – $f = 1/T$. В технике также часто используется так называемая круговая частота ω , представляющая собой число колебаний за 2π секунд,

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T.$$

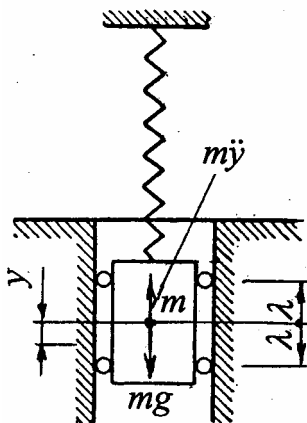
5.1. Свободные колебания системы с одной степенью свободы без затухания

Рассмотрим простейшую систему, состоящую из груза массой m и пружины (рис. 5.1).

При составлении уравнения движения следует исходить из принципа Д'Аламбера, который заключается в том, что к движущейся с ускорением системе могут быть применены соотношения статики при условии, что в числе внешних сил будет учтена сила инерции, равная произведению массы на ускорение и направленная против ускорения. Таким образом, можно записать

$$ky = -m\ddot{y},$$

где k – жесткость пружины.



Р и с. 5.1. Система с одной степенью свободы

Следовательно,

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \text{ где } \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Это уравнение представляет собой дифференциальное уравнение простых гармонических колебаний, решение которого может быть записано в форме

$$y = \lambda \sin(\omega t + \alpha),$$

где λ – амплитуда колебаний,
 ω – круговая частота колебаний,
 t – время,
 α – фаза колебаний.

$$\text{При } t = 0 \quad y = \lambda \sin \alpha \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{y}{\lambda}.$$

Колебания всегда происходят около положения статического равновесия. Амплитуда и фаза колебаний определяются начальными условиями.

Жесткость пружины – это отношение величины действующей силы $P = mg$ к статической деформации пружины

$$k = \frac{mg}{\Delta},$$

где Δ – статическая деформация под действием массы m .

Тогда круговая частота свободных колебаний составит

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta}}.$$

Из курса "Сопротивление материалов" известно, что для винтовой цилиндрической пружины

$$k = \frac{Gd^4}{64nr^3},$$

где G – модуль упругости второго рода,

d – диаметр проволоки,

n – число витков,

r – радиус витка пружины.

В этом случае мы допустили, что колебания происходят при отсутствии каких-либо причин, препятствующих движению, т.е. поглощающих энергию колеблющейся системы. Между тем, очевидно, что такие причины всегда существуют.

5.2. Свободные колебания системы с одной степенью свободы с затуханием

Так как свободные колебания происходят без притока энергии извне, а причины, вызывающие потерю энергии (сопротивление среды, трение в частицах металла и др.), действу-

ют постоянно, то, очевидно, амплитуда колебаний с течением времени должна уменьшаться до тех пор, пока, наконец, по истечении более или менее продолжительного отрезка времени, колебания не прекратятся.

Дифференциальное уравнение свободных колебаний системы с одной степенью свободы с затуханием, если сила затухания пропорциональна скорости движения груза, можно записать в следующем виде:

$$\ddot{y} + 2f\dot{y} + \omega^2 y = 0,$$

где f – коэффициент затухания.
Решение этого уравнения

$$y = \lambda e^{-ft} \sin(\omega_1 t + \alpha),$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - f^2}$ – частота колебаний,
 λe^{-ft} – амплитуда колебаний.

Из полученного выражения видно, что свободные колебания происходят с амплитудой, уменьшающейся по экспоненциальному закону.

Если $\omega^2 < f^2$, то процесс апериодический. Достигнув максимального отклонения, система асимптотически приближается к положению равновесия, не переходя никогда на другую его сторону.

5.3. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы без затухания

Рассмотрим систему с одной степенью свободы, в которой возбуждающая сила изменяется по гармоническому закону

$$P = P_0 \sin \Omega t,$$

где P_0 – максимальное значение силы,
 Ω – круговая частота изменения силы.

Такой силой может быть, например, вертикальная составляющая, передающаяся на основание, от центробежной силы, возникающей при вращении эксцентричного груза, укрепленного на шкиве, который вращается с угловой скоростью Ω (несбалансированная масса вращающегося ротора центробежного насоса, вентилятора, компрессора и др.).

Уравнение колебаний в дифференциальном виде выглядит следующим образом:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{P_0}{m} \sin \Omega t .$$

Полное решение этого уравнения складывается из решения однородного уравнения без правой части и частного решения уравнения с правой частью

$$y = \lambda \sin(\omega t + \alpha) + \frac{P_0}{m} \cdot \frac{\sin \Omega t}{\omega^2 - \Omega^2} .$$

При начальных условиях $t = 0$, $\dot{y}=0$ и $\frac{P_0}{m} = q$ данное уравнение переписется в следующем виде:

$$y = -\frac{q}{\omega^2 - \Omega^2} \cos \omega t + \frac{q}{\omega^2 - \Omega^2} \cos \Omega t$$

Следовательно, колебание состоит из двух колебаний с одинаковой амплитудой:

1. $y_1 = \frac{q}{\omega^2 - \Omega^2} \cos \omega t$ – представляет собой свободные колебания, которые возникают под влиянием импульса, сообщенного системе силой $P(t)$.

2. $y_2 = \frac{q}{\omega^2 - \Omega^2} \cos \Omega t$ — представляет собой вынужденные колебания, вызванные периодически изменяющейся силой.

Свободные колебания через некоторое время затухнут и останутся лишь вынужденные колебания, которые и рассмотрим. Амплитуда вынужденных колебаний $\lambda = \frac{q}{\omega^2 - \Omega^2}$.

Если $\Omega \ll \omega$, то амплитуда колебаний $\lambda = \Delta$, т.е. деформации системы при статической ее нагрузке силой P_0 .

Если $\Omega > \omega$, тогда $\lambda < 0$, т.е. возбуждающая сила и деформации имеют противоположные направления. Причем, если Ω возрастает, то амплитуда уменьшается и в пределе, при $\Omega \rightarrow \infty$ имеем следующее выражение:

$$\lambda_{\Omega \rightarrow \infty} = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{q}{\omega^2 - \Omega^2} = 0.$$

Так как напряжения, возникающие в материале, пропорциональны деформациям, то изменением ω или Ω можно удерживать деформацию, а следовательно, и напряжения в пределах допустимого и даже меньше любого заранее заданного значения. В использовании данной закономерности заключается принцип реализации виброизоляции машин с движущимися несбалансированными массами.

При $\Omega \rightarrow \omega$ амплитуда увеличивается и в пределе

$$\lambda_{\Omega \rightarrow \infty} = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{q}{\omega^2 - \Omega^2}.$$

Совпадение частоты возбуждающей силы с частотой свободных колебаний системы называется резонансом, а частота $\Omega = \omega$ называется *критической*.

Выражение для вычисления амплитуды вынужденных колебаний может быть представлено в виде

$$\lambda = \frac{q}{\omega^2 - \Omega^2} = \frac{q}{\omega^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} = f_{cm} \cdot \beta,$$

где $f_{cm} = \frac{q}{\omega^2}$ статическое удлинение от действия силы $P(t)$;

$\beta = \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}$ динамический коэффициент амплитуды (или

коэффициент динамичности), показывающий во сколько раз деформация возросла по сравнению с f_{cm} вследствие динамического характера действия сил.

Исследуем закон нарастания амплитуды при резонансе. Вынесем амплитуду колебаний как общий множитель,

тогда

$$y = q \frac{\cos \Omega t - \cos \omega t}{\omega^2 - \Omega^2},$$

т.е. неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\begin{aligned} y_{\Omega=\omega} &= \lim_{\Omega \rightarrow \omega} q \frac{\cos \Omega t - \cos \omega t}{\omega^2 - \Omega^2} = q \frac{\frac{d}{d\Omega} (\cos \Omega t - \cos \omega t)}{\frac{d}{d\Omega} (\omega^2 - \Omega^2)} = \\ &= q \frac{(-\sin \Omega t)t}{-2\Omega} = \frac{q}{2\Omega} t \sin \Omega t. \end{aligned}$$

Таким образом, амплитуда резонансных колебаний $\lambda_{рез} = \frac{q}{2\Omega} t$ возрастает не мгновенно, а пропорционально времени.

Во многих случаях представляется выгодным работать при частоте возбуждающей силы большей, чем частота собственных свободных колебаний системы. Чтобы этого достигнуть, неизбежно приходится пройти через резонанс. Чем меньше будет время прохождения через резонанс, тем меньшими будут деформации и напряжения. Таким образом, кратковременное состояние резонанса, как правило, не представляет опасности для системы, так как амплитуда колебаний не успевает достичь больших значений.

5.4. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы с затуханием

Уравнение вынужденных колебаний с затуханием при силе затухания пропорциональной скорости движения, в дифференциальном виде выглядит как

$$\ddot{y} + 2f\dot{y} + \omega^2 y - q \cos \Omega t = 0.$$

Полное решение данного уравнения может быть записано в виде

$$y = \lambda e^{-ft} \cos(\omega_1 t + \alpha) + \frac{q(\omega^2 - \Omega^2)}{(\omega^2 - \Omega^2) + 4f^2 \Omega^2} \cos \Omega t - \frac{2qf\Omega}{(\omega^2 - \Omega^2) + 4f^2 \Omega^2} \sin \Omega t.$$

Из данного универсального уравнения могут быть получены уравнения любых из ранее рассмотренных колебаний путем выбора соответствующих коэффициентов.

При $q = 0$ и $f = 0$ получим уравнение свободных колебаний без затухания. Уравнение с коэффициентами $q = 0$ и $f = f$ описывает свободные колебания с затуханием. Подстановкой q

$= q$ и $f = 0$ приходим к уравнению, описывающему вынужденные колебания без затухания.

Так как по истечении достаточно долгого промежутка времени свободные колебания с затуханием, представленные первым членом полученного уравнения, затухают, ограничимся рассмотрением вынужденных колебаний.

$$y = \frac{q(\omega^2 - \Omega^2)}{(\omega^2 - \Omega^2) + 4f^2\Omega^2} \cos \Omega t - \frac{2qf\Omega}{(\omega^2 - \Omega^2) + 4f^2\Omega^2} \sin \Omega t .$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \frac{q(\omega^2 - \Omega^2)}{(\omega^2 - \Omega^2) + 4f^2\Omega^2} &= A \cos \gamma , \\ \frac{2qf\Omega}{(\omega^2 - \Omega^2) + 4f^2\Omega^2} &= A \sin \gamma , \end{aligned}$$

где A и γ – постоянные, подлежащие определению.

Возвышая последние выражения в квадрат и суммируя их получим

$$A = \frac{q}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2) + 4f^2\Omega^2}} ,$$

и, разделив второе выражение на первое, найдем

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2f\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} .$$

Таким образом, уравнение вынужденных колебаний может быть записано в виде

$$y = A \cos \gamma \cos \Omega t - A \sin \gamma \sin \Omega t = A \sin(\Omega t - \gamma) .$$

Отсюда видно, что вынужденные колебания с затуханием являются гармоническими колебаниями с частотой, равной частоте Ω возбуждающей силы, и с амплитудой A . Фазовый угол γ представляет собой сдвиг между силой и деформацией. В случае резонанса имеем

$$A_{\Omega=\omega} = \frac{q}{2f\Omega} \neq \infty,$$

т.е. амплитуда колебаний при вынужденных колебаниях с затуханием остается всегда конечной и обратно пропорциональна коэффициенту затухания f и частоте колебаний Ω .

Коэффициент динамичности может быть получен делением A на f_{cm} , таким образом, для вынужденных колебаний с затуханием

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + \frac{4f^2\Omega^2}{\omega^4}}}.$$

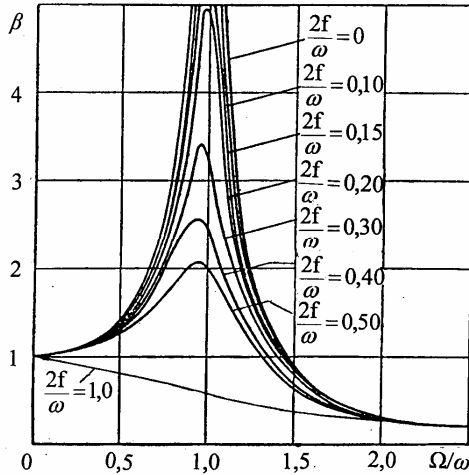
Определим отношение частот $\frac{\Omega}{\omega}$, при котором будет наблюдаться максимальное значение коэффициента динамичности β . Для этого воспользуемся известными процедурами – найдем производную и приравняем ее к нулю, тогда после упрощения получим

$$\frac{\Omega}{\omega} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2f}{\omega}\right)^2} < 1.$$

Следовательно, максимальная амплитуда будет наблюдаться не при равенстве частот (не при резонансе), а ранее и будет равна

$$A_{\max} = \beta_{\max} \cdot f_{cm}.$$

И в этом случае также возникает вопрос о том, насколько опасны возмущающие силы для работы упругой системы и не приведут ли они к преждевременному разрушению.



Р и с. 5.2. Изменение коэффициента динамичности

На графике (рис. 5.2) показано влияние затухания на величину коэффициента динамичности, из которого видно, что это влияние особенно значительно в интервале

$$0,55 \leq \frac{\Omega}{\omega} \leq 1,25.$$

При этом представляется возможным подсчитать и амплитуду вынужденных колебаний, не зная наперед величину коэффициента затухания.

Как видно из рис. 5.2 кривые при различных β заметно отличаются друг от друга лишь в указанном интервале. Вне этого интервала приведенные кривые практически совпадают, и коэффициент затухания для расчетов значения не имеет. Его

можно просто принять равным нулю, что идет в запас прочности конструкции.

Возбуждающая сила передается на основание, поэтому для снижения нагрузок на отдельные элементы вводят амортизаторы и пружины.

Если бы затухания не было, то единственной силой, передаваемой основанию, была бы сила упругости пружин, равная

$$P_{\text{осн}} = k\beta f_{cm} = \beta P.$$

В этом случае коэффициент передачи нагрузок на фундамент α совпадает с коэффициентом динамичности β и равен

$$\alpha = \beta = \frac{P_{\text{осн}}}{P}.$$

Таким образом, если сопоставление частот Ω и ω демонстрирует опасность возникновения резонанса, необходимо путем конструктивных изменений добиться изменения той или иной частоты с тем, чтобы такая возможность была исключена. При этом наиболее целесообразным будет увеличение соотношения $\frac{\Omega}{\omega}$, так как при этом достигается более значительное снижение коэффициента β . Проще всего этого можно добиться снижением жесткости пружин.

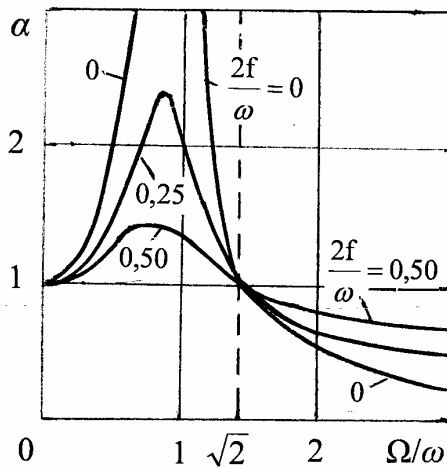
Если конструктор не имеет возможности изменять частоты, то необходимо вводить амортизаторы, которые повышают поглощение энергии при колебаниях (обеспечивают затухание колебаний).

При наличии затухания на фундамент передается не только сила упругости пружин, но и сила затухания. В этом случае коэффициент затухания будет равен

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{2f}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{2f}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}}.$$

Независимо от коэффициента затухания коэффициент передачи равен единице при статической нагрузке ($\frac{\Omega}{\omega} = 0$) и при отношении частот $\frac{\Omega}{\omega} = \sqrt{2}$. Зависимость изменения коэффициента передачи представлена на рис. 5.3. [3].

Из данного графика следует важный вывод, что при отношении частот меньше $\sqrt{2}$ необходимы как упругие элементы (пружины), так и амортизаторы; при отношении же частот больше $\sqrt{2}$ достаточно только упругих элементов.



Р и с. 5.3. Изменение коэффициента передачи силы на основании

5.5. Колебания систем с несколькими степенями свободы

Рассмотрение различных систем, имеющих одну степень свободы, показало, что основной характеристикой колебательной системы является частота собственных колебаний. В зависимости от частоты собственных колебаний системы определяются степень опасности возникновения резонанса и величина напряжений при вынужденных колебаниях.

Аналогичный подход возможен и при нескольких степенях свободы. Только вместо одного дифференциального уравнения для перемещений имеется система нескольких уравнений. Решение такой системы уравнений возможно различными приближенными методами. Например, такое решение для системы с двумя степенями свободы показывает, что существуют две формы колебаний.

Таким образом, система с двумя степенями свободы обладает двумя собственными частотами. Если у системы есть три степени свободы, она будет иметь соответственно три собственные частоты. Для их определения нужно решать уже не квадратное, а кубическое уравнение. Следовательно, при добавлении каждой новой степени свободы задача будет усложняться, однако современная вычислительная техника и здесь позволяет добиться результата.

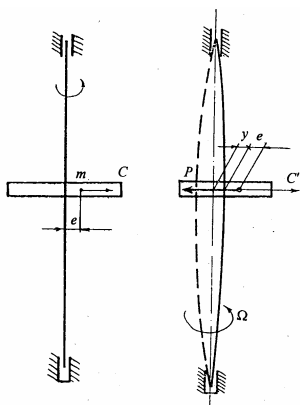
5.6. Критическая скорость вала

Быстровращающиеся детали машин не могут быть идеально сбалансированы и на практике всегда существуют инерционные силы, отклоняющие вращающуюся деталь от оси вращения. Законы, описывающие поведение данной системы, те же, что и для колеблющихся систем. При этом при определенных угловых скоростях вращения вала, называемых критическими, возникают наибольшие прогибы вала и наибольшая вибрация системы. В этом случае амплитуда колебаний стано-

вится весьма значительной, а вал испытывает существенные динамические прогибы и, как следствие, большие напряжения. Длительная работа валов с дисками при таких скоростях недопустима, так как напряжения могут возрасти до такой степени, что вал получит значительные остаточные деформации или даже может разрушиться. Описать данное явление довольно просто, если рассмотреть упругую систему как колебательную, а силы дисбаланса – как возмущающие силы.

Таким образом, колебания валов носят резонансный характер при совпадении рабочей скорости с частотой собственных изгибных колебаний.

Рассмотрим работу вала, на который насажен диск, имеющий эксцентриситет e (рис. 5.4.). Угловая скорость вращения вала – Ω , масса диска – m . Определим прогиб вала от действия центробежной силы, возникающей при вращении, которая равна



Р и с. 5.4. Расчетная схема вала с диском

$$C = m \cdot r \cdot \Omega^2,$$

где r – радиус вращения центра тяжести массы m .

Первоначально $r = e$, но, после того как вал получит упругий прогиб y , радиус вращения станет равным $r = e + y$, а центробежная сила составит

$$C' = m(e + y)\Omega^2.$$

Центробежная сила C' стремится переместить массу по радиусу от оси вращения; этому перемещению препятствует сила упругости, действующая на массу со стороны вала и пропорциональная его прогибу

$$P = -ky.$$

Коэффициент пропорциональности k представляет собой силу, вызывающую единичный прогиб, и характеризует изгибную жесткость вала. Уравнение равновесия действующих сил имеет вид

$$C' + P = 0 \text{ или } m(e + y)\Omega^2 = ky.$$

Из данного уравнения легко находится величина прогиба

$$y = \frac{m \cdot e \cdot \Omega^2}{k - m\Omega^2}.$$

При некотором значении угловой скорости знаменатель обращается в нуль, и угловая скорость называется критической; ее величина определяется как

$$\Omega_{кр} = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

В докритической области с увеличением рабочей частоты вращения вала прогиб увеличивается и при критической скорости стремится к бесконечности. В за критической области прогиб вала с увеличением скорости вращения уменьшается, и это явление называется самоцентрированием, а валы в этом случае называются гибкими.

5.7. Расчетные формулы для определения критических скоростей вала с одним диском

Значения статического прогиба вала вычисляются по формулам, известным из курса "Сопротивление материалов". Различают в основном два вида опор валов – короткие и длинные подшипники. Короткие подшипники не препятствуют повороту сечения вала на опоре при изгибе и аналогичны шарнирным опорам балки; длинные же подшипники аналогичны защемлению.

Вал в коротких подшипниках. В этом случае прогиб в месте приложения силы определяется как для балки на шарнирных опорах и критическая скорость равна

$$\Omega_{кр}^2 = \frac{3gEI}{G(l-a)^2 a^2},$$

где E – модуль упругости материала вала, МПа;
 I – момент инерции поперечного сечения вала, м⁴;
 G – приведенный вес диска, Н;
 l – расстояние между подшипниками, м;
 a – расстояние от одного из подшипников до диска, м.
Для случая, когда диск расположен посередине

$$\Omega_{кр} \cong 6,93 \sqrt{\frac{gEI}{Gl^3}}.$$

Вал в длинных подшипниках. Воспользовавшись значением прогиба для балки с жестко защемленными концами, получим

$$\Omega_{кр}^2 = \frac{3gEI l^3}{G(l-a)^3 a^3}.$$

Если диск расположен посередине, то

$$\Omega_{кр} \cong 13,86 \sqrt{\frac{gEI}{Gl^3}} .$$

Вал в одном длинном и одном коротком подшипниках. Критическая скорость определяется по формуле

$$\Omega_{кр}^2 = \frac{12gEI\pi^3}{Ga^3b^2(3l+b)} ,$$

где $b = l - a$.

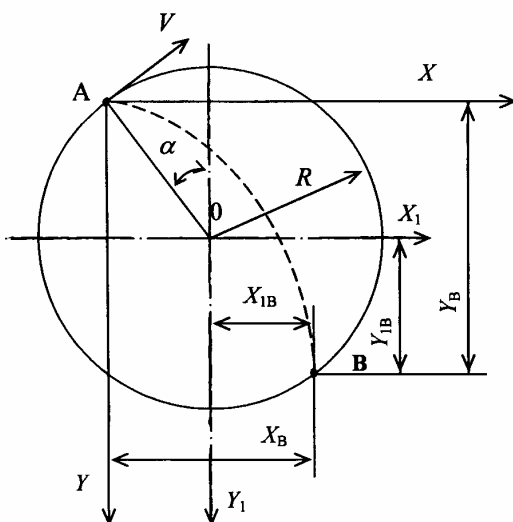
Если диск расположен посередине вала, то $a = b = l/2$, тогда

$$\Omega_{кр} \cong 10,47 \sqrt{\frac{gEI}{Gl^3}} .$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

6.1. Определение оптимального числа оборотов барабанной мельницы

Барабан мельницы загружается измельчаемым материалом и мелющими телами (шарами). При вращении барабана мельницы мелющие тела увлекаются силой трения в сторону вращения, поднимаются на некоторую высоту, а затем или сползают по его внутренней поверхности, или скатываются, или, оторвавшись от стенки, падают вниз (рис. 6.1.). Измельчение материала происходит за счет энергии движения мелющих тел.



Р и с. 6.1. Схема к расчету оптимального числа оборотов барабанной мельницы

Подъем мелющих тел и характер их последующего движения зависит от частоты вращения барабана. При небольшой скорости движения шары после подъема на некоторую высоту будут скатываться без удара, в этом случае эффективность измельчения будет невелика. При слишком большой скорости вращения шары перестанут отрываться от стенок и, будут перемещаться вместе с барабаном.

Оптимальной скоростью вращения будет такая, при которой мелющие тела будут отрываться от стенки (рис. 6.1), а высота падения $H = Y_b$ будет наибольшей.

Для нахождения оптимальной скорости поступим следующим образом. Выберем две системы координат XAY и X_1OY_1 . Мелющее тело падает из точки А в точку В по параболе, которая в системе координат XAY описывается уравнением

$$y = -x \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot V^2 \cdot \cos^2 \alpha}.$$

Отрыв в точке А происходит при соблюдении условия

$$V = \sqrt{g \cdot R \cdot \cos \alpha},$$

тогда можно записать

$$y = -x \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{x^2}{2 \cdot R \cdot \cos^3 \alpha}.$$

Это уравнение описывает всю траекторию, включая точки А и В, которые лежат на окружности барабана, описываемой в системе координат X_1OY_1 уравнением $x_1^2 + y_1^2 = R^2$.

Координаты любой точки связаны между собой следующим образом: $x_1 = x - R \cdot \sin \alpha$, $y_1 = y - R \cdot \cos \alpha$.

Уравнение окружности можно переписать в следующем виде: $(x - R \cdot \sin \alpha)^2 + (y - R \cdot \cos \alpha)^2 = R^2$. Решим совместно уравне-

ние окружности и уравнение параболы для определения координат точек пересечения. Подставляя значение y из уравнения параболы, получим:

$$(x - R \cdot \sin \alpha)^2 + \left(-x \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{x^2}{2 \cdot R \cdot \cos^3 \alpha} - R \cdot \cos \alpha \right)^2 = R^2.$$

После упрощения уравнение перепишется в виде

$$\frac{x^3}{R \cdot \cos^4 \alpha} \left(\frac{x}{4 \cdot R \cdot \cos^2 \alpha} - \sin \alpha \right) = 0.$$

Корни уравнения $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ соответствуют точке А, а корень $x_4 = 4 \cdot R \cdot \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$ соответствует точке В траектории, т.е. $x_B = x_4$. Подставим полученное значение x_B в уравнение параболы, тогда

$$\begin{aligned} y_{\epsilon} &= -4 \cdot R \cdot \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{16 \cdot R^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^4 \alpha}{2 \cdot R \cdot \cos^3 \alpha} = \\ &= 4 \cdot R \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Найдем y'_{ϵ} и, приравняв к нулю, получим

$$y'_{\epsilon} = 4 \cdot R \cdot \sin \alpha (2 \cdot \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0.$$

Так как $\alpha \neq 0$ и $R \neq 0$, то $2 \cdot \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0$, откуда $\alpha_{onm} = 54^{\circ}40'$.

Оптимальная скорость вращения

$$\omega_{onm} = \sqrt{\frac{g \cdot \cos \alpha_{onm}}{R}} = \frac{2,38}{\sqrt{R}}.$$

6.2. Оптимизация работы щековой дробилки по числу качаний подвижной щеки

При конструировании щековой дробилки определяются следующие основные параметры машины [13]:

- размеры и взаимное расположение щек;
- частота качаний подвижной щеки;
- мощность привода.

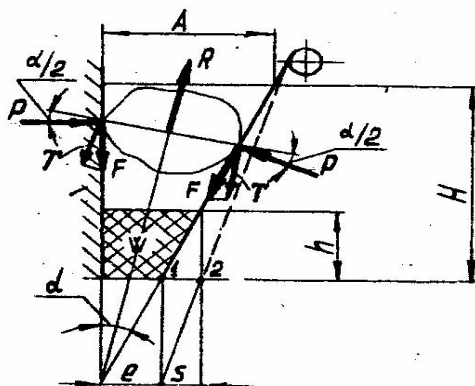
Исходными данными для расчетов являются: производительность, начальный и конечный размеры кусков измельчаемого материала, а также его плотность.

Необходимо найти угол захвата α и число качаний подвижной щеки дробилки (частоту вращения приводного вала) n . На частицу материала, находящуюся между щеками дробилки, действуют силы (рис. 6.2): сжимающая P , выталкивающая R , трения F и удерживающая T .

Частицу измельчаемого материала выталкивает из пасти дробилки равнодействующая сжимающих сил, направленная вдоль ее оси $R = 2P\sin(\alpha/2)$, а удерживает равнодействующая сил трения $F = Pf$, которая равна $R' = 2T$, где f – коэффициент трения материала о щеку, $T = Pfc\cos(\alpha/2)$. Частицы материала останутся в дробилке, если $2T > R$.

Таким образом, условием захвата измельчаемого материала является $\operatorname{tg}(\alpha/2) \leq f$, или $\alpha \leq 2\varphi$, где φ - угол трения частицы материала о щеку дробилки.

Для определения оптимального числа качаний подвижной щеки дробилки рассмотрим ее движение. При верхнем подвесе щеки имеются два крайних положения ее нижнего конца 1 и 2 (см. рис. 6.2.) и перемещение равно S . За одно движение из пасти дробилки под действием собственного веса может высыпаться объем материала, соответствующий заштрихованному контуру W . Для обеспечения этого условия необходимо, чтобы время τ_1 отхода щеки из положения 1 в положение 2 было равно времени τ_2 высыпания слоя материала высотой h .



Р и с. 6.2. Схема для расчета работы щековой дробилки

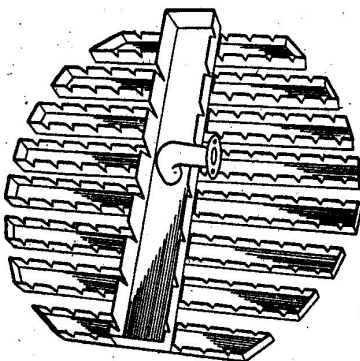
Если частота вращения приводного вала n [об/с], то $\tau_1 = 1/2n$. Из уравнения равноускоренного движения $\tau_2 = \sqrt{2h/g}$. Так как α во время работы изменяется незначительно, то из геометрических соотношений можно записать $h = S/\operatorname{tg} \alpha$. Окончательно получим $n_{\text{опт}} = 1,1 \sqrt{\operatorname{tg} \alpha / S}$.

Потребляемая мощность, а следовательно, и мощность привода могут быть определены по эмпирическим уравнениям в зависимости от геометрических размеров загрузочного отверстия. Установочная мощность двигателя принимается обычно на 50% выше расчетной.

6.3. Приложение теории к расчету оросительного стакана

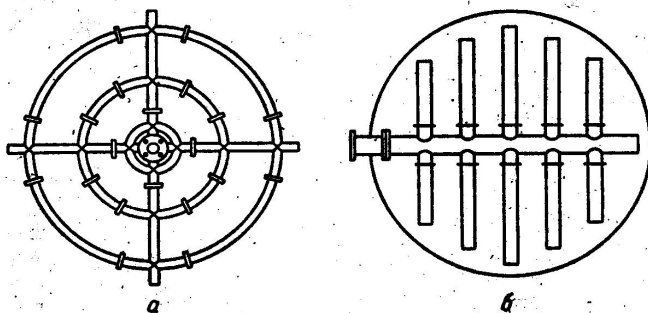
Одним из важных узлов насадочных колонн являются оросители, т.е. распределительные устройства для жидкости. Наиболее часто применяют желобчатые оросители, трубчатые оросители и оросительные стаканы.

Распределители, изготовленные из желобов, довольно просты по конструкции (рис. 6.3.), но требуют тщательной установки для обеспечения равномерности распределения жидкости и достаточно материалоемки.



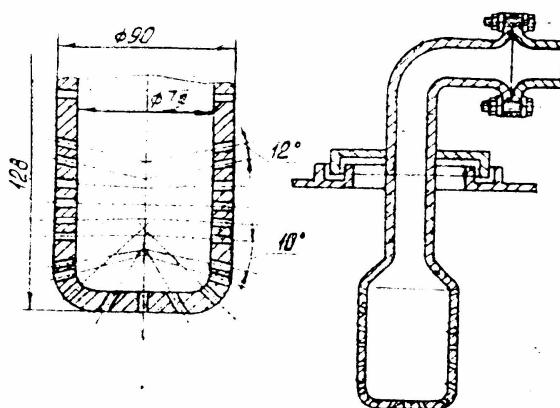
Р и с. 6.3. Желобчатый распределитель жидкости

В качестве распределителей жидкости также можно применять перфорированные трубы, конструктивно выполненные в виде паука (*а*) или коллектора (*б*) (рис. 6.4.). Недостатком их является то, что они материалоемки и работают равномерно лишь тогда, когда для конкретного расхода жидкости правильно выбрана площадь перфорации.



Р и с. 6.4. Трубчатые оросители

Наименее материалоемкими и более компактными являются оросительные стаканы (рис. 6.5.), которые позволяют распределять жидкость на значительную поверхность из одной точки. Отверстия в стакане направлены в разные стороны и выполнены с различными углами наклона, благодаря чему обеспечивается равномерное распределение жидкости. Их основной недостаток – распыление части жидкости. Стаканы изготавливают из металла или керамики и применяют в основном для орошения колонн, работающих на чистой жидкости.



Р и с. 6.5. Оросительный стакан

Отверстия в стакане выполнены под разными углами к линии горизонта и направлены в разные стороны, благодаря чему обеспечивается равномерное распределение жидкости.

При конструировании оросителей дискретного типа необходимо устанавливать определенное количество точек орошения, приходящихся на единицу площади поперечного сечения насадочного аппарата, для того чтобы иметь достаточно равномерное орошение торца насадки и не усложнять конструкцию оросителя.

На выбор числа точек орошения влияет в первую очередь тип насадки. Для регулярных насадок число точек ороше-

ния должно быть значительно больше, чем для нерегулярных (хаотично уложенных).

Рекомендуемое значение оптимального количества точек орошения на 1 м^2 площади поперечного сечения [15] для хаотичной насадки составляет 20, а для регулярной насадки зависит от диаметра аппарата следующим образом:

0,4 – 0,8 м — количество точек 300;

0,8 – 1,2 м — количество точек 150;

более 1,2 м — количество точек 50.

В связи со значительной разницей в количестве точек орошения, необходимых для различных типов насадок, рекомендуется устройство небольшого слоя хаотичной насадки поверх регулярной, что улучшает равномерность распределения жидкости и повышает эффективность работы насадки.

При проектировании оросительных стаканов жидкость обычно распределяется по концентрическим окружностям. Насадка по торцу разбивается на N зон равной ширины исходя из необходимого количества точек орошения, то есть в зависимости от диаметра аппарата и типа насадки.

Соотношение площадей кольцевых зон, а следовательно, и число точек орошения на каждую зону, а значит и количество отверстий n_i на ярусах оросительного стакана определяется арифметической прогрессией

$$n_i = 1 ; 3 ; 5 ; \dots ; (2N - 1).$$

Рассчитаем количество отверстий оросительного стакана, их диаметр и углы наклона для случая смачивания нерегулярной насадки в колонне диаметром $D = 1000 \text{ мм}$ при расходе жидкости $Q = 36 \text{ м}^3/\text{час}$ и высоте подпора жидкости $H = 4 \text{ м}$. Оросительный стакан располагается на высоте $y = 500 \text{ мм}$ над поверхностью насадки.

Площадь поперечного сечения колонны, а следовательно, и площадь торца насадки составит $F = 0,785D^2 = 0,785 \cdot 1^2 = 0,785 \text{ м}^2$.

Для нерегулярной насадки при заданном диаметре рекомендуемое количество точек орошения составляет $0,785 \cdot 20 = 16$. Такое количество точек орошения обеспечивается при количестве зон орошения $N = 4$, так как $\Sigma n_i = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$. Ширина каждой зоны орошения составляет 125 мм.

Используя теорию низконапорного истечения жидкости из отверстия в тонкой стенке, найдем диаметр отверстий при $\mu = 0,62$

$$d_0 = \sqrt{\frac{4q}{\mu\pi\sqrt{2gH}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,000625}{0,62 \cdot \pi\sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 4}}} = 0,012 \text{ м},$$

где $q = Q/\Sigma n_i = 36/16 = 2,25 \text{ м}^3/\text{час} = 0,000625 \text{ м}^3/\text{с}$ – расход жидкости через одно отверстие.

Отверстие для орошения первой зоны должно быть выполнено в центре оросительного стакана с осью перпендикулярной к линии горизонта. Для нахождения положения осей отверстий для орошения второй, третьей и четвертой зон воспользуемся уравнением траектории низконапорной струи при $y = 0,5 \text{ м}$, $\varphi = 0,98$.

Положение точек орошения принимается по срединным окружностям зон орошения, тогда

$$\begin{aligned} x_2 &= 0,125 + 0,125/2 = 0,1875 \text{ м}, \\ x_3 &= 0,125 + 0,125 + 0,125/2 = 0,3125 \text{ м}, \\ x_4 &= 0,4375 \text{ м}. \end{aligned}$$

Уравнение траектории низконапорной струи для второй зоны $y = x_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + \frac{x_2^2}{4\varphi^2 H \cos^2 \alpha_2}$, откуда, после подстановок и преобразований, получим

$$\operatorname{tg}^2 \alpha_2 + 81,9 \operatorname{tg} \alpha_2 - 217,5 = 0.$$

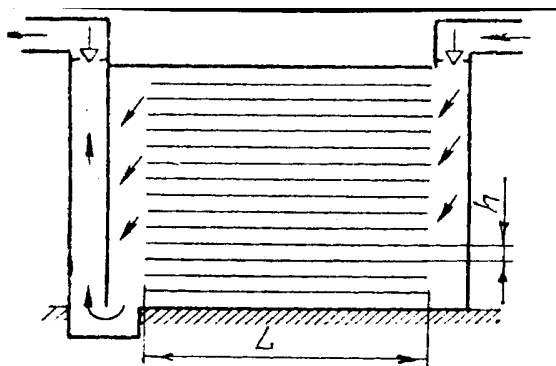
Решив данное квадратное уравнение, найдем два значения угла наклона отверстий второго яруса к линии горизонта α_2 : $89,3$ и $-69,0^\circ$, соответственно. Знак минус у второго значения свидетельствует о том, что угол отсчитывается от линии горизонта против часовой стрелки. Принимаем значение $\alpha_2 = 89,3^\circ$. Аналогично найдем $\alpha_3 = 88,9^\circ$ и $\alpha_4 = 88,4^\circ$.

Таким образом, все данные, необходимые для конструктивного расчета оросительного стакана, получены.

6.4. Определение основных геометрических размеров пылеосадительной камеры

Гравитационная пылеочистка газов заключается в осаждении твердых частиц при прохождении по горизонтальным каналам между полками в пылеосадительной камере (рис. 6.6.).

Обычно диаметр частиц, полностью удаляемых в пылеосадительной камере, составляет не менее 70 мкм и закон Стокса для таких частиц справедлив.



Р и с. 6.6. Схема пылеосадительной камеры

Если скорость осаждения частицы w , а расстояние между полками h , то максимальная продолжительность осаждения из самой неблагоприятной позиции будет равна h/w . За это

время запыленный газ, движущийся со скоростью w_r , пройдет отрезок пути l . Длина полок пылеосадительной камеры L должна быть больше или равна пути осаждения l .

Для того чтобы твердые частицы не уносились газовым потоком скорость газа не должна превышать максимально допустимой величины [16]

$$w_{\max} \leq 3,6 \sqrt{\frac{d(\gamma - \gamma_c)}{\gamma_c}}.$$

Обычно действительная скорость газа принимается в пределах $w_r = (0,2 \div 0,3) w_{\max}$.

Таким образом, длина полок пылеосадительной камеры составит

$$L \geq l = h \cdot w_r / w.$$

Основные конструктивные размеры пылеосадительной камеры в большинстве случаев определяются имеющимися производственными площадями.

6.5. Определение характеристик отстойника

В результате процесса отстаивания в течение некоторого времени суспензия расслаивается на сгущенный слой (шлам) и слой осветленной жидкости. Объем осветленной жидкости в единицу времени равен

$$V = \frac{hF}{\tau},$$

где h – высота слоя,
 F – поверхность осаждения,
 τ – время осаждения.

Зная, что $h = w \cdot \tau$, можно найти необходимую поверхность отстаивания

$$F = \frac{V}{w},$$

или в пересчете на суспензию

$$F = \frac{G_c}{\gamma_{ж} w} \left(1 - \frac{x_1}{x_2} \right),$$

где G_c – весовой расход суспензии, Н/с;
 $\gamma_{ж}$ – удельный вес осветленной жидкости, Н/м³;
 x_1 – содержание сухого вещества в суспензии в долях;
 x_2 – содержание сухого вещества в осадке в долях.

Производительность отстойника пропорциональна поверхности осаждения и не зависит от высоты отстойника, поэтому высоту отстойника обычно не рассчитывают, а принимают равной до 2,5 – 3,5 м.

В качестве примера определим производительность, поверхность и диаметр отстойника для осветления суспензии в количестве $G_c = 60$ Н/с. Концентрация твердой фазы в суспензии $x_1 = 0,2$, концентрация сгущенной суспензии $x_2 = 0,5$, скорость осаждения суспензии $w = 1,4 \cdot 10^{-4}$ м/с, удельный вес осветленной жидкости $\gamma_{ж} = 10300$ Н/м³.

Определяем производительность отстойника по твердой фазе

$$G_{мс} = G_c \cdot x_1 = 60 \cdot 0,2 = 12 \text{ Н/с.}$$

Производительность отстойника по сгущенной суспензии подсчитывается так:

$$G_{сг} = G_{мс} / x_2 = 12 / 0,5 = 24 \text{ Н/с.}$$

Производительность отстойника по осветленной жидкости составит

$$G_{жс} = G_c - G_{сз} = 60 - 24 = 36 \text{ Н/с.}$$

Рассчитываем поверхность осаждения отстойника

$$F = \frac{60}{10300 \cdot 1,4 \cdot 10^{-4}} \left(1 - \frac{0,2}{0,5} \right) = 25 \text{ м}^2.$$

Диаметр отстойника составит

$$D = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 25}{\pi}} = 5,64 \text{ м.}$$

С учетом запаса по производительности примем диаметр $D = 6 \text{ м.}$

6.6. Оптимальная производительность периодически действующих фильтров при постоянной разности давлений

Фильтрованием называется процесс разделения неоднородной системы при помощи пористой перегородки, состоящей из фильтрующего материала и постепенно накапливающегося на его поверхности слоя осадка, которые задерживают одну фазу системы и пропускают другую. К процессам фильтрования относятся разделение суспензий на чистую жидкость и влажный осадок, аэрозолей на чистый газ и сухой осадок или на чистый газ и жидкость.

Разделение суспензий производится при помощи фильтров, которые в простейшем случае представляют собой сосуд, разделенный на две части пористой фильтровальной перегородкой. При фильтрации жидкость проходит через поры

фильтровальной перегородки, а взвешенные твердые частицы задерживаются на этой перегородке. По достижении установленной толщины слоя осадка его удаляют с поверхности фильтровальной перегородки тем или иным способом, а цикл периодического процесса начинается заново.

Для процесса фильтрования, как показывает опыт, в дифференциальной форме справедливо следующее уравнение [17]

$$\frac{dV}{Sd\tau} = \frac{\Delta P}{\mu(R_{oc} + R_{\phi})},$$

где V – объем фильтрата, $м^3$;

S – поверхность фильтрования, $м^2$;

τ – продолжительность фильтрования, $с$;

ΔP – разность давлений до и после фильтровальной перегородки, $Па$;

μ – вязкость жидкой фазы суспензии, $Па \cdot с$;

R_{oc} – сопротивление слоя осадка, $м^{-1}$;

R_{ϕ} – сопротивление фильтровальной перегородки, $м^{-1}$.

Иными словами, объем фильтрата, получаемый за малый промежуток времени с единицы поверхности фильтровальной перегородки, прямо пропорционален разности давлений и обратно пропорционален вязкости фильтрата и общему сопротивлению осадка и фильтровальной перегородки.

При этом выражение $\frac{dV}{Sd\tau} = W$ представляет собой переменную скорость фильтрования.

Сопротивление слоя осадка прохождению жидкости через фильтрующий материал может быть определено как

$$R_{oc} = r_o \cdot x_o \cdot \frac{V}{S},$$

где r_o – удельное объемное сопротивление осадка (сопротивление, оказываемое потоку фильтрата равномерным слоем осадка толщиной 1 м), м^2 ;

x_o – отношение объемов осадка и фильтрата.

Тогда

$$\frac{dV}{Sd\tau} = \frac{\Delta P}{\mu \left(r_o \cdot x_o \cdot \frac{V}{S} + R_\phi \right)}.$$

Данное уравнение показывает, что при прочих равных условиях скорость фильтрования тем больше, чем меньше объем полученного фильтрата или толщина слоя осадка на фильтровальной перегородке. Поэтому для повышения производительности фильтра необходимо стремиться к возможно более быстрому удалению осадка с фильтровальной перегородки. Однако это справедливо только для фильтров непрерывного действия, так как во время удаления осадка с фильтровальной перегородки фильтров периодического действия процесс разделения суспензии прерывается.

При $\Delta P = \text{const}$ все величины в этом уравнении, за исключением V и τ , постоянны. После разделения переменных и интегрирования выражения получаем

$$\frac{\mu \cdot r_o \cdot x_o}{S} \cdot \frac{V^2}{2} + \mu \cdot R_\phi \cdot V = \Delta P \cdot S \cdot \tau$$

По способу удаления осадка различают фильтры периодического и непрерывного действия. Полный цикл работы периодически действующих фильтров состоит обычно из операций подготовки фильтра, загрузки суспензии, собственно фильтрации, промывки осадка, продувки через его поры воздуха или инертного газа и выгрузки осадка. Фильтрование, промывку и продувку осадка называют *основными операциями*, а подготовку фильтра, загрузку суспензии и выгрузку осадка – *вспомогательными*.

Продолжительность основных операций связана определенными закономерностями с объемом фильтрата или пропорциональной этому объему толщиной слоя осадка. Аналогичных закономерностей для вспомогательных операций не существует, так как продолжительность этих операций зависит в основном от конструкции фильтра и условий его эксплуатации. Предположим для простоты, что для каждого конкретного фильтра продолжительность вспомогательных операций является величиной практически постоянной независимо от толщины слоя осадка, образовавшегося на поверхности фильтрующей перегородки. Такое допущение не вносит существенной погрешности в результаты расчета оптимальной производительности работы фильтра при известном давлении перед фильтрующей перегородкой. Для увеличения производительности фильтра по основным операциям целесообразно как можно чаще повторять циклы его работы, подавая на фильтр по возможности небольшие порции суспензии. Однако частое повторение циклов работы фильтра обуславливает столь же частое повторение вспомогательных операций. Таким образом, можно предположить, что в каждом конкретном случае существует такая продолжительность цикла работы, при которой фильтр имеет наибольшую, т.е. оптимальную, производительность.

Наибольшая производительность фильтра может определяться графически путем нахождения максимума на кривой, построенной в координатах продолжительность проведения основных операций – средняя производительность фильтра в единицу времени за весь цикл его работы. Однако задача может быть решена проще, так как искомую величину можно найти аналитически.

Сущность аналитического метода состоит в следующем: определяют функциональную зависимость средней производительности работы фильтра в единицу времени за весь ее цикл от продолжительности осуществления основных операций и обычным путем находят максимум функции. Для применения этого метода необходимо, чтобы зависимость продолжитель-

ности операций промывки и продувки осадка от количества получаемого фильтрата могла быть выражена аналитически.

Рассмотрим общий случай определения наибольшей производительности фильтра при постоянной разности давлений перед фильтрующей перегородкой, когда цикл его работы включает в себя операции фильтрования, промывки и продувки осадка. Примем, что закономерность процесса фильтрования соответствует уже полученному уравнению. Примем также для простоты, что сопротивлением фильтровальной перегородки можно пренебречь.

Продолжительность цикла фильтрации при $R_{\phi} = 0$ равна

$$\tau = \frac{\mu \cdot r_o \cdot x_o}{2 \cdot S^2 \cdot \Delta P} V^2.$$

Введем обозначения $\frac{\mu \cdot r_o \cdot x_o}{\Delta P} = A$ – постоянная для конкретного случая величина; $\frac{V}{S} = q$ – объем фильтрата на 1 м² фильтровальной перегородки. Тогда:

$$\tau = \frac{1}{2} A \cdot q^2$$

и данное уравнение будет исходным также для последующих расчетов.

Из этого выражения следует, что время фильтрования пропорционально квадрату объема фильтрата.

Под промывкой осадка, образовавшегося на поверхности фильтровальной перегородки, понимается процесс извлечения жидкости, задержавшейся в порах этого осадка, другой жидкостью, смешивающейся с первой. Жидкость, задержавшаяся в порах, называется фильтратом или жидкой фазой осадка, а жидкость, применяемая для извлечения фильтрата из пор осадка, называется промывочной жидкостью.

Процесс промывки осадка на фильтре более сложен, чем фильтрование. Процесс промывки осадка можно разделить на две стадии. В течение первой стадии, продолжительность которой относительно невелика, концентрация растворенного вещества в промывочной жидкости постоянна. В течение второй, более продолжительной стадии, концентрация растворенного вещества непрерывно уменьшается.

Опыт показал, что для второй стадии справедливо уравнение

$$\frac{G}{G_0} = 1 - \frac{0,25}{\frac{V_{п.ж.}}{V_0}},$$

где G – вес растворенного вещества в промывной жидкости, Н;

G_0 – вес растворенного вещества в фильтрате, Н;

$V_{п.ж.}$ – объем промывной жидкости, м³;

V_0 – объем фильтрата в порах осадка перед промывкой, м³.

Причем G_0 и V_0 фиктивные величины, получаемые экстраполяцией опытных данных. Заменяв отношение $V_{п.ж.}/V_0$ на равное отношению $q_{п.ж.}/q_0$ из предыдущего уравнения получим следующее выражение:

$$q_{п.ж.} = \frac{0,25q_0}{1 - \frac{G}{G_0}}.$$

С учетом равенства $q_0 = \varepsilon \cdot x_0 \cdot q$ и обозначения постоянно-го комплекса $B = \frac{0,25 \cdot \varepsilon \cdot x_0}{1 - \frac{G}{G_0}}$ можно записать $q_{п.ж.} = B \cdot q$.

Под скоростью промывки осадка $W_{п.}$, аналогично скорости процесса фильтрования W , понимают объем промывной

жидкости, проходящей через единицу поверхности осадка в единицу времени.

Поскольку процесс промывки по существу является фильтрованием при неизменной толщине слоя осадка, то, подставив в исходное уравнение вместо q значение $q_{п.ж.}$ и приняв показатели вязкости промывной жидкости и фильтрата одинаковыми, после преобразований находим уравнение, выражающее зависимость продолжительности операции промывки от количества фильтрата, получаемого за операцию фильтрования:

$$\tau_n = \frac{1}{2} A \cdot B^2 \cdot q^2.$$

После промывки осадок на поверхности фильтровальной перегородки часто продувают воздухом для извлечения из его пор по возможности большего количества промывной жидкости.

Жидкость, находящаяся в порах осадка, называется влагой, содержание этой фазы в осадке – влажностью, а процесс вытеснения жидкой фазы из пор осадка газом – обезвоживанием.

При обезвоживании влага в порах осадка обычно движется ламинарно, и скорость обезвоживания может быть описана следующим уравнением:

$$W_{об} = W \cdot m_y^y,$$

где m_y – эффективное насыщение влагой осадка;

y – показатель степени, зависящий от размера твердых частиц.

Скорость процесса фильтрования при условии, что сопротивлением фильтровальной перегородки можно пренебречь, примет следующее выражение:

$$W = \frac{\Delta P}{\mu \cdot r_o \cdot h_{oc}}.$$

Из материального баланса процесса стадии обезвоживания с некоторыми упрощениями можно найти время, за которое он происходит:

$$\tau_{об} = \left[\frac{(1 - m_o)^2 + 1}{2} \right] \frac{m_3^{1-y}}{y-1} \cdot \frac{\varepsilon \cdot \mu \cdot r_o \cdot h_{oc}^2}{\Delta P},$$

где m_o – остаточное насыщение осадка влагой;

h_{oc} – толщина слоя осадка, м.

С учетом равенства $h_o = x_o \cdot q$ и обозначив

$$C = \left[\frac{(1 - m_o)^2 + 1}{2} \right] \frac{m_3^{1-y}}{y-1} \cdot \varepsilon \cdot x_o \text{ получим } \tau_{об} = A \cdot C \cdot q^2.$$

Общая продолжительность всех трех операций составит

$$\tau_{очн} = \tau + \tau_{п} + \tau_{об} = 0,5 \cdot A \cdot q^2 + 0,5 \cdot A \cdot B^2 \cdot q^2 + A \cdot C \cdot q^2 = D \cdot q^2.$$

Здесь $D = 0,5 \cdot A \cdot (1 + B^2 + C)$. Зная общую продолжительность проведения основных операций можно найти

$$q = \sqrt{\frac{\tau_{очн}}{D}}.$$

Отрицательный корень в данном уравнении не имеет физического смысла, и решение является посторонним ввиду положительного значения величины q .

Среднюю производительность фильтра в единицу времени за весь цикл его работы можно охарактеризовать условной средней скоростью фильтрования, под которой понимают частное от деления количества фильтрата, полученного за один

цикл работы фильтра с 1 м^2 поверхности фильтрования q , на общую продолжительность цикла $\tau_{\text{ц}} = \tau_{\text{осн}} + \tau_{\text{всп}}$:

$$W_{\text{усл}} = \frac{\sqrt{\frac{\tau_{\text{осн}}}{D}}}{\tau_{\text{осн}} + \tau_{\text{всп}}}.$$

Для определения максимального значения величины $W_{\text{усл}}$ данное уравнение следует продифференцировать по $\tau_{\text{осн}}$ и первую производную приравнять к нулю.

После дифференцирования и некоторых преобразований, получаем следующее выражение:

$$\frac{dW_{\text{усл}}}{d\tau_{\text{осн}}} = \frac{\tau_{\text{всп}} - \tau_{\text{осн}}}{2\sqrt{D \cdot \tau_{\text{осн}}} (\tau_{\text{осн}} + \tau_{\text{всп}})^2} = 0.$$

Поскольку знаменатель в этом уравнении не равен нулю, то $\tau_{\text{всп}} - \tau_{\text{осн}} = 0$ или $\tau_{\text{осн}} = \tau_{\text{всп}}$.

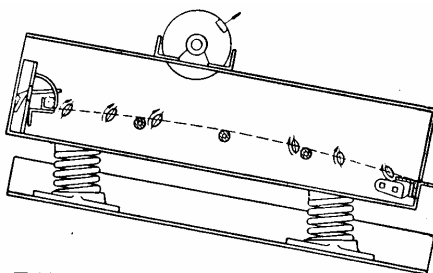
Вторая производная при $\tau_{\text{осн}} = \tau_{\text{всп}}$ оказывается отрицательной величиной, т.е. $W_{\text{усл}}$ достигает максимума.

Таким образом, если пренебречь сопротивлением фильтровальной перегородки, то наибольшая производительность работы фильтра достигается при равенстве продолжительности основных и вспомогательных операций.

6.7. Применение теории колебаний к решению практических задач

Найти амплитуду вынужденных колебаний и силу, передаваемую на основание, при работе виброгрохота массой $M = 25 \text{ кг}$, привод которого осуществляется с помощью эксцентрикового вала с массой эксцентричного груза $m = 1 \text{ кг}$ и экс-

центриситетом груза $e = 0,05$ м. Грохот установлен на четырех вертикальных цилиндрических витых пружинах (рис. 6.7.).



Р и с. 6.7. Схема виброгрохота

Скорость вращения эксцентрикового вала $N = 2400$ об/мин. Пружины, изготовленные из проволоки диаметром $d = 0,02$ м, имеют по $n = 6$ витков радиус навивки пружины составляет $r = 0,03$ м.

Круговая частота вынужденных колебаний находится из уравнения

$$\Omega = \frac{\pi N}{30} = \frac{\pi \cdot 2400}{30} = 251,3 \text{ с}^{-1}.$$

Величина возмущающей силы составляет

$$P_0 = m \cdot e \cdot \Omega^2 = 1 \cdot 0,05 \cdot 251,3^2 = 3160 \text{ Н}.$$

Жесткость витой цилиндрической пружины

$$k = \frac{Gd^4}{64nr^3} = \frac{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,02^4}{64 \cdot 6 \cdot 0,03^3} = 1,23 \cdot 10^6 \text{ Н/м},$$

где $G = 8 \cdot 10^{10}$ – модуль Юнга для стали, Па.

Статическая деформация под действием массы грохота определяется так:

$$\Delta = \frac{Mg}{4k} = \frac{25 \cdot 9,81}{4 \cdot 1,23 \cdot 10^6} = 4,98 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Круговая частота собственных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta}} = \sqrt{\frac{9,81}{4,98 \cdot 10^{-5}}} = 444,0 \text{ с}^{-1}.$$

Коэффициент динамичности

$$\beta = \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{251,3}{444,0}\right)^2} = 1,47.$$

Статическая деформация пружины от действия силы P_0

$$f_{\text{ст}} = \frac{P_0}{4k} = \frac{3160}{4 \cdot 1,23 \cdot 10^6} = 6,42 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Амплитуда вынужденных колебаний

$$\lambda = \beta \cdot f_{\text{ст}} = 1,47 \cdot 6,42 \cdot 10^{-4} = 9,44 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

При отсутствии процесса затухания коэффициент передачи нагрузки на основание (на фундамент) составит $\alpha = \beta$. Сила, передаваемая на фундамент

$$Q = \beta \cdot P_0 = 1,47 \cdot 3160 = 4650 \text{ Н.}$$

6.8. Оптимизация геометрических размеров реактора с неподвижным слоем катализатора и рециркуляцией потока

На эффективность работы объекта химической техники влияет ряд факторов, в том числе и конструктивные характеристики оборудования, основными из которых для большинства аппаратов являются габаритные размеры, а именно высота и диаметр. При постоянном объеме аппарата возможно значительное число сочетаний этих параметров. Объективный выбор их отношения, обеспечивающий наилучшее значение критерия оптимизации, и является предметом оптимизации.

Универсальным обобщающим показателем (критерием оптимизации), наиболее полно характеризующим степень достижения оптимального решения, является показатель "Прибыль" или показатель "Приведенные затраты".

В рассматриваемом аппарате осуществляется процесс течения газовой фазы через зернистый слой твердого катализатора. Для возврата в процесс непрореагировавших исходных веществ в большинстве случаев используется рециркуляция. Таким образом, для создания рецикла расходуется энергия на сжатие газа до давления, необходимого для преодоления гидравлического сопротивления системы, состоящего в основном из сопротивления зернистого слоя катализатора. Рассмотрим случай аксиального движения газа.

Сопротивлением системы определяются эксплуатационные затраты в виде расхода электроэнергии на компримирование газа. Выбранные в качестве определяющих диаметр реактора D и его высота H существенно влияют на сопротивление движению потока газа и тем самым определяют расход электроэнергии. В то же время H и D влияют на величину полной поверхности аппарата и толщину его стенок, т.е. на расход металла при изготовлении, а это, в свою очередь, приводит к изменению капитальных затрат.

За критерий оптимизации примем приведенные затраты

$$Пз = Э + Ен \cdot К,$$

где Э – эксплуатационные затраты;
 К – капитальные затраты;
 Ен – нормативный коэффициент.

Оптимальным вариантом является такой, при котором будет достигаться минимум приведенных затрат. Для решения задачи необходимо установить, каким образом эксплуатационные и капитальные затраты связаны с величинами D и H. Будем рассматривать только ту часть затрат, которая изменяется при варьировании D и H

$$\Delta Пз = \Delta Э + Ен \cdot \Delta К.$$

Помимо расхода электроэнергии на привод циркуляционного компрессора необходимо учитывать также размер амортизационных отчислений и расходы, необходимые на текущий ремонт, что можно подсчитать с помощью коэффициентов Ам и Рт (доли капитальных вложений, отчисляемые на амортизацию и текущий ремонт), или

$$\Delta Э = Ээ \cdot Цэ + (Ам + Рт) \cdot \Delta К,$$

где Ээ – расход электроэнергии;
 Цэ – цена электроэнергии.
 Таким образом,

$$\Delta Пз = Ээ \cdot Цэ + (Ам + Рт + Е) \cdot \Delta К.$$

Расход электроэнергии определяется мощностью компрессора N и количеством часов его работы в году Т. Капитальные затраты исчисляются произведением массы аппарата М на цену единицы массы изделия данного типа.

В результате расчетов должна быть получена зависимость изменения приведенных затрат от изменения геометрических размеров аппарата

$$\Delta\Pi_3 = f(H, D).$$

Оптимальными значениями H и D будут такие, при которых $\Delta\Pi_3$ будет иметь минимум. Однако из большого количества величин H и D нас будут интересовать только те, при которых в аппарате может быть помещено необходимое количество катализатора, определяемое из технологических условий. Это значит, что должно соблюдаться соотношение

$$V_k = \frac{\pi}{4} D^2 H_k \text{ или } \frac{\pi}{4} D^2 H_k - V_k = 0,$$

где H_k – высота слоя катализатора.

Для нахождения экстремального значения можно воспользоваться методом Лагранжа. Он предусматривает наложение на переменные ограничений типа равенств и введение неопределенного множителя. При этом вводится вспомогательная функция θ , являющаяся суммой целевой функции $\Delta\Pi_3 = f(H, D)$ и произведения неопределенного множителя Лагранжа на наложенное ограничение.

$$\theta = f(H, D) + \lambda \left(\frac{\pi}{4} D^2 H_k - V_k \right).$$

После нахождения частных производных от целевой функции последовательно по трем переменным D , H , λ и приравнивания их к нулю образуется система из трех уравнений. Ее решение дает оптимальное значение геометрических размеров реактора при заданных конкретных условиях задачи – состав сырья и получаемых продуктов, тип катализатора и т.д.

Рассмотрим данную задачу более подробно, но с упрощениями, которые сделаны в учебных целях, а именно, облегчают понимание логики решения.

Найдем зависимость мощности компрессора N от высоты и диаметра реактора.

Сжатие циркулирующего газа осуществляется адиабатически, а с учетом охлаждения стенок цилиндра компрессора – политропически. Мощность на валу компрессора [10] находится по уравнению

$$N = \frac{1}{\eta_{\text{и}} \eta_{\text{м}}} \cdot \frac{m}{m-1} \cdot P_1 V_1 \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right],$$

где $\eta_{\text{и}}$ – индикаторный к.п.д. компрессора;

$\eta_{\text{м}}$ – механический к.п.д. компрессора;

m – показатель политропы;

P_1 – давление всасывания, МПа;

P_2 – давление нагнетания, МПа;

V_1 – всасываемый объем, м³/с.

Давление на входе в реакционный аппарат равно P_2 , а на выходе (без учета сопротивления трубопроводов) – P_1 , причем $P_2 = P_1 + \Delta P$, где ΔP – сопротивление реактора.

В связи с тем, что скорость движения газов вдоль оси аппарата может считаться постоянной, определение сопротивления слоя катализатора может быть проведено по формуле Эргуна [18]

$$\frac{\Delta P_{\text{к}}}{H_{\text{к}}} = 150 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \cdot \frac{\mu U}{d_{\text{э}}^2} + 1,75 \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3} \cdot \frac{\rho U^2}{d_{\text{э}}},$$

где μ – динамическая вязкость газа, Н·с/м²;

U – фиктивная скорость газа (в расчете на полное сечение аппарата, м/с;

$d_{\text{э}}$ – эквивалентный диаметр пор, м;

ρ – плотность газа, Н·с²/м⁴;

ε – порозность слоя катализатора.

Порозность слоя катализатора или доля свободного пространства между частицами в единице объема легко определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{\rho_k - \rho_n}{\rho_k - \rho},$$

где ρ_k – кажущаяся плотность частиц катализатора, $\text{Н} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4$;
 ρ_n – насыпная плотность слоя катализатора, $\text{Н} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4$.

Для частиц округлой формы, близкой к шарообразной, средняя порозность слоя может быть принята равной 0,4.

Эквивалентный диаметр пор для зернистого слоя определяется в курсе "Гидравлика" как отношение смоченного периметра к площади поперечного сечения [19] или

$$d_s = \frac{2\varepsilon}{3(1-\varepsilon)}d \text{ или } d_s = \frac{4}{9}d,$$

где d – диаметр шарообразных частиц катализатора, м.

В условиях работы реакторов с рециркуляцией при относительно высоких скоростях газа преобладают силы инерции, поэтому первое слагаемое в уравнении Эргуна может быть опущено, так как оно составляет в этих условиях около 6% от общего сопротивления, т.е. можно просто ввести поправочный коэффициент 1,06. Сопротивление самого реактора в целом выше сопротивления слоя катализатора, так как дополнительно создаются местные сопротивления за счет различных внутренних устройств. Для учета дополнительных сопротивлений также введем поправочный коэффициент, равный 1,07.

Кроме того, выразим фиктивную скорость движения газа через высоту слоя катализатора и время пребывания газов в зоне катализатора

$$U = \frac{H_k}{\tau}.$$

Тогда уравнение Эргуна примет вид

$$\Delta P = 2 \cdot \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3} \cdot \frac{\rho}{d_3} \cdot \left(\frac{H_k}{\tau} \right)^2 \cdot H_k$$

или

$$\Delta P = 2 \cdot \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3} \cdot \frac{\rho}{d_3 \tau^2} H_k^3.$$

Обозначив, $A = 2 \cdot \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3} \cdot \frac{\rho}{d_3 \tau^2}$ окончательно получаем

$$\Delta P = A H_k^3.$$

Из данного уравнения следует, что сопротивление реактора с аксиальным движением газового потока пропорционально кубу высоты слоя катализатора. Используем данное соотношение при вычислении мощности циркуляционного компрессора.

В первую очередь упростим исходное уравнение для определения мощности, обозначив $\frac{m-1}{m} = \xi$ и разложив

$\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^\xi$ в ряд.

$$\begin{aligned} \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} &= \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^\xi = \left(1 + \frac{\Delta P}{P_1} \right)^\xi = \\ &= 1 + \xi \frac{\Delta P}{P_1} + \frac{\xi(\xi-1)}{2!} \left(\frac{\Delta P}{P_1} \right)^2 + \frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)}{3!} \left(\frac{\Delta P}{P_1} \right)^3 \dots \end{aligned}$$

С учетом того, что $\frac{\Delta P}{P_1} \ll 1$, ограничимся тремя членами ряда. Окончательно, мощность компрессора в учебных целях может быть рассчитана по формуле

$$N = \frac{1}{\eta_n \eta_m} P_1 V_1 \left[\frac{A H_k^3}{P_1} - \left(\frac{A H_k^3}{P_1} \right)^2 \frac{1}{2m} \right].$$

Расход электроэнергии равен

$$\text{Ээ} = k \cdot N \cdot T,$$

где k – переходной коэффициент.

Найдем капитальные вложения в реактор ΔK , которые определяются, как сказано ранее, его массой и ценой единицы массы продукции данного класса химической техники.

Для упрощения расчетов в учебных целях примем, что днища реактора эллиптические стандартные, а длина цилиндрической части составляет 1,5 высоты слоя катализатора из условия размещения распределительных устройств и фарфоровых шаров.

Масса аппарата

$$M = (F_{\text{ц}} + 2F_{\text{д}}) \cdot S \cdot \rho_m,$$

где $F_{\text{ц}}$ – поверхность цилиндрической части корпуса, м^2 ;
 $F_{\text{д}}$ – поверхность эллиптического днища, м^2 ;
 S – толщина стенки корпуса и днищ, м ;
 ρ_m – удельный вес металла реактора, $\text{Н} \cdot \text{с}^2 / \text{м}^4$.
 Поверхность цилиндрической части корпуса

$$F_{\text{ц}} = 1,5\pi D H_k.$$

Для стандартного эллиптического днища

$$F_3 = 0,345\pi D^2.$$

Толщина стенки рассчитывается по известному из курса "Сопротивления материалов" [7] уравнению для оболочек, нагруженных внутренним давлением

$$S = \frac{PD}{2\varphi[\sigma] - P} + C,$$

где $P = P_2 = P_1 + \Delta P = P_1 + A \cdot H_k^3$ - давление внутри реактора;
 $[\sigma]$ – допускаемое напряжение для материала корпуса в рабочих условиях;
 φ – коэффициент прочности сварного шва;
 C – прибавка на коррозию.

Так как давление P обычно велико, то пренебречь его величиной в знаменателе было бы некорректно, однако для упрощения расчетов его можно учесть поправочным коэффициентом, и предыдущая формула может быть записана в виде

$$S = 1,02 \frac{PD}{2\varphi[\sigma]} = 0,51 \frac{PD}{\varphi[\sigma]}.$$

Окончательно, масса аппарата может быть связана с геометрическими размерами следующим уравнением

$$M = 0,51\pi\rho_m (1,5DH_k + 2 \cdot 0,345D^2) \frac{(P_1 + AH_k^3)D}{\varphi[\sigma]}.$$

Таким образом, капитальные затраты на изготовление реактора будут равны

$$\Delta K = 0,51\pi\rho_m (1,5DH_k + 2 \cdot 0,345D^2) \frac{(P_1 + AH_k^3)D}{\varphi[\sigma]} \Pi_{пр},$$

где $\Pi_{\text{пр}}$ – цена единицы массы продукции данного класса.

Для упрощения написания критерия оптимальности введем следующие обозначения комплексов постоянных в условиях данной задачи величин:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{V_1 A}{\eta_{\text{и}} \eta_{\text{м}}} \kappa \text{ТЦЭ}, \\ B_2 &= \frac{V_1 A^2}{2m\eta_{\text{и}} \eta_{\text{м}}} \cdot \frac{1}{P_1} \kappa \text{ТЦЭ}, \\ B_3 &= 0,765 \frac{\pi \rho_{\text{м}} (A_{\text{м}} + P_{\text{т}} + E)}{\varphi[\sigma]} P_1 \Pi_{\text{пр}}, \\ B_4 &= 0,765 \frac{\pi \rho_{\text{м}} (A_{\text{м}} + P_{\text{т}} + E)}{\varphi[\sigma]} A \Pi_{\text{пр}}, \\ B_5 &= 0,352 \frac{\pi \rho_{\text{м}} (A_{\text{м}} + P_{\text{т}} + E)}{\varphi[\sigma]} P_1 \Pi_{\text{пр}}, \\ B_6 &= 0,352 \frac{\pi \rho_{\text{м}} (A_{\text{м}} + P_{\text{т}} + E)}{\varphi[\sigma]} A \Pi_{\text{пр}}. \end{aligned}$$

С использованием этих обозначений функция приведенных затрат примет следующий вид:

$$\Delta \Pi_{\text{з}} = B_1 H_{\text{к}}^3 - B_2 H_{\text{к}}^6 + B_3 D^2 H_{\text{к}} + B_4 D^2 H_{\text{к}}^4 + B_5 D^3 + B_6 D^3 H_{\text{к}}^3$$

Или же вспомогательная функция запишется как

$$\begin{aligned} \theta &= B_1 H_{\text{к}}^3 - B_2 H_{\text{к}}^6 + B_3 D^2 H_{\text{к}} + B_4 D^2 H_{\text{к}}^4 + B_5 D^3 + \\ &+ B_6 D^3 H_{\text{к}}^3 + \lambda \left(\frac{\pi}{4} D^2 H_{\text{к}} - V_{\text{к}} \right). \end{aligned}$$

Найдем частные производные вспомогательной функции и приравняем их к нулю.

$$\frac{\partial \theta}{\partial D} = 2B_3 D H_{\kappa} + 2B_4 D H_{\kappa}^4 + 3B_5 D^2 + 3B_6 D^2 H_{\kappa}^3 + 2 \frac{\pi}{4} \lambda D H_{\kappa} = 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial H} = 3B_1 H_{\kappa}^2 - 6B_2 H_{\kappa}^5 + B_3 D^2 + 4B_4 D^2 H_{\kappa}^3 + 3B_6 D^3 H_{\kappa}^2 + \frac{\pi}{4} \lambda D^2 = 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \lambda} = \frac{\pi}{4} D^2 H_{\kappa} - V_{\kappa} = 0.$$

Из первых двух частных производных путем решения каждой из них относительно λ и приравнивания правых частей образуется уравнение с двумя неизвестными H и D , которое после упрощений принимает вид

$$\frac{H_{\kappa}}{D} = \sqrt{\frac{B_5 D H_{\kappa}^{-1} - 2B_4 H_{\kappa}^3 - B_6 D H_{\kappa}^2}{2(B_1 - 2B_2 H_{\kappa}^3)}}.$$

Введем обозначение постоянного комплекса, известного обычно из технологических расчетов, $W = \frac{4V_{\kappa}}{\pi}$ и перейдем к одной переменной $z = \frac{H_{\kappa}}{D}$, тогда предыдущее уравнение может быть преобразовано к виду

$$z = \sqrt{\frac{B_5 z^{-1} - 2B_4 W z^2 - B_6 W z}{2(B_1 - 2B_2 W z^2)}}.$$

Решение данного уравнения может быть легко получено с использованием численных методов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Главной целью написания этой книги было оказание помощи в приобретении навыков практического использования полученных ранее знаний математики, физики, теоретической механики и других дисциплин.

В каждом разделе авторы стремились продемонстрировать возможность использования «абстрактных» формул для решения «реальных» задач.

В главе 2 показывается, как математический анализ функций одной переменной связан с оптимизацией геометрический размеров емкостей аппаратуры.

Материал третьей главы демонстрирует возможности теоретического расчета нагрузок от собственного веса аппаратов для выбора такелажной оснастки и грузоподъемных механизмов, а также для расчета основных размеров опорных элементов.

Теоретические выкладки физики и гидравлики использованы при анализе задач главы 4, которая наглядно демонстрирует необходимость этих знаний при решении практических задач с элементами движения в системе.

Без сведений, представленных в пятой главе невозможен достоверный анализ динамических нагрузок и перемещений в различных машинах химических производств: центрифугах, насосах, вентиляторах и т.д.

В заключительной главе авторы попытались привести конкретные примеры решения некоторых практических задач.

Если читатели этого пособия пришли к выводу, что знание математики нужно не только математикам, а физики – не только физикам, то авторы достигли поставленной цели.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Выгодский М.Я.. Справочник по высшей математике. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. 784 с.
2. Краткий физико-технический справочник/ Под общей редакцией К. П. Яковлева. Т. 1. Математика. Физика. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 446 с.
3. Канторович З.Б.. Основы расчета химических машин и аппаратов. М.: Машгиз, 1960. 744 с.
4. Правила устройства и безопасной эксплуатации сосудов, работающих под давлением. ПБ 03-576-03. М.: Изд-во «омега», 2006. 275с.
5. Маньковский О.Н., Толчинский А.Р., Александров М.В. Теплообменная аппаратура химических производств. Л.: Химия, 1976. 368 с.
6. ГОСТ 14249-89. Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность.
7. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1972. 544 с.
8. Стариков В.П., Кац Н.Г.. Физико-математические методы в нефтяной технологии: Конспект лекций. Ч. I. Самара; СамГТУ, 2002. 42 с.
9. Матвеев В.В. Примеры расчета такелажной оснастки. Изд. 2-е, перераб. и доп. Л.: Стройиздат, 1974. 208 с.
10. Канторович Б.В. Гидравлика, гидравлические и воздушные машины. М.: Metallurgizdat, 1950. 540 с.
11. Канторович Б.В. Машины химической промышленности. М.: Машиностроение, 1965. 416 с.
12. Машины и аппараты химических производств: Примеры и задачи/ Под общ. ред. В.Н. Соколова. Л.: Машиностроение, Ленигр. отд-ние, 1982. 384 с.
13. Шаповалов Ю.Н., Шеин В.С. Машины и аппараты общехимического назначения: Учеб. пособ. Ворон.: ВГУ, 1981. 304 с.

14. Павлов К.Ф., Романков П.Г., Носков А.А.. Примеры и задачи по курсу процессов и аппаратов химической технологии. Л.: Химия, Ленингр. отд-ние, 1970. 624 с.
15. Александров И.А. Ректификационные и абсорбционные аппараты. Методы расчета и основы конструирования. Изд. 2-е, перераб. М.: Химия, 1971. 296 с.
16. Машины и аппараты химических производств/ Под ред. И.И. Чернобыльского. М.: Машиностроение, 1974. 456 с.
17. Жужиков В.А. Фильтрование. Теория и практика разделения суспензий. Изд. 2-е, перераб. М.: Химия, 412 с.
18. Касаткин А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. М.: Химия, 1973. 752 с.
19. Циборовский Я. Основы процессов химической технологии. Л.: Химия, 1967. 720 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава 1. Общие сведения об использовании физико-математических методов	4
1.1. Конструктивные особенности химической техники. Влияние параметров процесса на форму и размеры технологического оборудования	4
1.2. Критерии оптимизации и оптимальное проектирование машин и аппаратов	4
1.3. Математические методы получения целевой функции и поиска оптимального варианта	10
1.4. Универсальный технико-экономический критерий оптимальности	12
Глава 2. Оптимизация геометрических размеров емкостного оборудования	14
2.1. Оболочки вращения. Основные понятия	14
2.2. Определение объемов различных тел	17
2.3. Определение поверхности оболочек вращения	24
2.4. Оптимизация размеров параллелепипеда	27
2.5. Оптимизация размеров сосудов, работающих без давления	36
2.6. Геометрия сосудов с торосферическими днищами	40
2.7. Геометрия сосудов с коническим днищем с плавным переходом	42
2.8. Задачи оптимизации плоских сечений	43
2.9. Уравнение Лапласа	45
2.10. Расчет толщины стенок оболочек вращения	47
2.11. Расчет оптимальных размеров емкости, работающей под действием внутреннего давления	50
Глава 3. Определение нагрузок от веса аппаратов	54
3.1. Статические моменты пластины	55

3.2. Нахождение центров тяжести оболочек вращения.....	59
3.3. Нахождение центров тяжести пространственных тел.....	64
3.4. Расчет усилий при монтаже оборудования....	67
3.5. Расчет усилий при подъеме несимметричного оборудования.....	73
3.6. Оптимальное расположение опор горизонтальных аппаратов.....	75
Глава 4. Решение задач с элементами движения в системе.....	78
4.1. Движение тела, брошенного под некоторым углом к линии горизонта.....	79
4.2. Теория низконапорного истечения жидкости из отверстия в тонкой стенке.....	80
4.3. Траектория низконапорной струи.....	83
4.4. Движение материальной частицы во вращающемся барабане.....	83
4.5. Движение точки по барабану.....	87
4.6. Скорость скольжения материала по желобу...	91
4.7. Осаждение под действием сил тяжести.....	92
4.8. Общие рекомендации к выбору аппарата для разделения суспензий.....	93
Глава 5. Колебания и виброизоляция. Основные определения теории колебаний.....	95
5.1. Свободные колебания системы с одной степенью свободы без затухания.....	96
5.2. Свободные колебания системы с одной степенью свободы с затуханием.....	98
5.3. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы без затухания.....	99
5.4. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы с затуханием.....	103

5.5. Колебания системы с несколькими степенями свободы.....	109
5.6. Критическая скорость вала.....	109
5.7. Расчетные формулы для определения критических скоростей вала с одним диском.....	112
Глава 6. Примеры решения некоторых практических задач.....	114
6.1. Определение оптимального числа оборотов барабанной мельницы.....	114
6.2. Оптимизация работы щековой дробилки по числу качаний подвижной щеки.....	117
6.3. Приложение теории к расчету оросительного стакана.....	118
6.4. Определение основных геометрических размеров пылесадительной камеры.....	123
6.5. Определение характеристик отстойника.....	124
6.6. Оптимальная производительность периодически действующих фильтров при постоянной разности давлений.....	126
6.7. Применение теории колебаний к решению практических задач.....	134
6.8. Оптимизация геометрических размеров реактора с неподвижным слоем катализатора и рециркуляцией потока.....	137
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	147
Библиографический список.....	148